

## Introduction au transfert radiatif

Frédéric Geniet

► **To cite this version:**

| Frédéric Geniet. Introduction au transfert radiatif. DEA. 2013, pp.59. cel-00804553

**HAL Id: cel-00804553**

**<https://cel.archives-ouvertes.fr/cel-00804553>**

Submitted on 25 Mar 2013

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Introduction au transfert radiatif

F. GENIET

*Département Physique Théorique, Laboratoire Charles Coulomb, UMR 5221  
CNRS-UM2, Université Montpellier 2, Place E. Bataillon, 34095 Montpellier  
CEDEX 5*

## Résumé

Une introduction à la théorie du transfert radiatif et à quelques unes de ses applications est présentée. Ce cours se veut simple, non exhaustif, et présente la théorie élémentaire, les domaines dans lesquels cette théorie est utile, et les méthodes les plus simples de résolution de l'équation du transfert radiatif (ETR). Ce rapide aperçu du permet de se faire une idée du sujet, et d'aborder de façon mieux équipée les publications spécialisées. Des sujets peu abordés par les astrophysiciens y sont traités (sphère intégrante, correction de Giovanelli...). Les calculs sont raisonnablement détaillés, et on utilise assez systématiquement des outils d'analyse fonctionnelle ( $\delta$  de Dirac en particulier) qui permettent de court-circuiter les arguments vagues à la "on voit bien que...", en particulier pour établir l'équation de Giovanelli. Enfin, j'ai essayé de garder des conventions de signe cohérentes et décentes pour un physicien. Comme toujours, les misprints et erreurs de signes sont de moi. Ce cours correspond à l'enseignement de transfert radiatif du Master Physique Informatique de l'université de Montpellier 2.

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Présentation du transfert radiatif.</b>	<b>4</b>
1.1	Introduction.	4
1.2	Bref historique et domaines d'applications.	5
1.3	quand ne pas utiliser la théorie du transfert radiatif?	6
1.4	Voyage dans un verre de menthe à l'eau.	6
1.5	Le problème type.	8
<b>2</b>	<b>Photométrie.</b>	<b>10</b>
2.1	Différentes photométries.	10
2.2	La photométrie énergétique.	11
2.2.1	Flux.	11
2.2.2	Intensité.	12
2.2.3	Eclairement.	13
2.2.4	Emittance et réflectance.	13
2.2.5	Luminance.	14
2.3	La photométrie lumineuse.	17
2.4	Exemple d'applications : le four à pain et la sphère intégrante.	17
<b>3</b>	<b>Les grandeurs de la théorie du transfert.</b>	<b>22</b>
3.1	Notations.	22
3.2	La radiance.	22
3.2.1	Définition.	22
3.2.2	Densité énergétique.	23
3.2.3	Flux à travers une surface fixe.	23
3.2.4	Exemples.	24
3.3	Relation avec les quantités photométriques.	25
3.4	Réflectances et transmittances moyennées.	27
3.5	La réflexion et la transmission de Fresnel-Descartes.	28
<b>4</b>	<b>L'équation du transfert radiatif.</b>	<b>30</b>
4.1	Dérivation de l'équation du transfert (ETR).	30
4.1.1	Processus d'absorption.	30
4.1.2	Processus de diffusion.	30
4.1.3	Equation du transfert.	31
4.2	Milieux stratifiés.	32
4.3	Conditions aux limites.	33
4.4	Invariances.	33
<b>5</b>	<b>Loi de Beer-Lambert et théorie de Kubelka-Munk</b>	<b>35</b>
5.1	Introduction	35
5.2	Loi de Beer-Lambert	35
5.3	Modèle de Kubelka et Munk	37
5.3.1	Présentation.	37
5.3.2	Résolution du modèle.	38
5.3.3	Conditions aux limites.	38
5.3.4	Correction de Saunderson.	41
5.4	Conclusion	43

<b>6</b>	<b>Méthodes de résolution de l'ETR.</b>	<b>45</b>
6.1	Une première solution non triviale. . . . .	45
6.2	Equation intégrale du transfert. . . . .	47
6.3	Equation intégrale de Schwarzschild - Milne. . . . .	48
6.4	Développement en série de Born. . . . .	49
6.5	Solution de Chandrasekhar. . . . .	50
6.6	Solution du problème de Milne. . . . .	52
6.7	Méthode de "Adding-Doubling". . . . .	54
	6.7.1 Dérivation de la méthode . . . . .	54
	6.7.2 Applications . . . . .	56
6.8	Equations de Preisendorfer et Mobley . . . . .	58
<b>7</b>	<b>Conclusion.</b>	<b>59</b>

# 1 Présentation du transfert radiatif.

## 1.1 Introduction.

La théorie du transfert radiatif permet de décrire la propagation de la lumière dans les milieux désordonnés où se produisent des phénomènes de diffusion et d'absorption multiples. Il s'agit d'une théorie phénoménologique : l'approche utilise une description de la lumière par flux énergétiques, sans passer par les équations de Maxwell. De plus, le milieu dans lequel se produit la diffusion et l'absorption est traité comme un milieu continu. Puisque on traite de la propagation des flux, on ne peut pas décrire d'effets interférentiels<sup>1</sup>. On ne peut donc en principe pas l'utiliser lorsque la distance entre diffuseurs est plus petite que la distance de cohérence de la lumière, ce qui est rarement le cas en pratique. Cependant on constate souvent que cette description fonctionne très bien, même lorsqu'elle ne devrait pas, et que l'on peut appliquer la théorie du transfert radiatif dans des milieux très denses ! Cela est dû au fait qu'un grand nombre de diffusion finit toujours par faire disparaître les effets de cohérence.

Dans le même ordre d'idées, la diffusion individuelle de la lumière par les particules est ce que l'on appelle la diffusion de Mie. Dans le cas de sphères, la figure de diffraction est connue et assez complexe, présentant en particulier un grand nombre de pics de diffraction lorsque la longueur d'onde est comparable à la taille des sphères. Cette diffusion de Mie complexe n'est quasiment jamais observée en pratique : quelques diffusions suffisent à faire disparaître les subtiles figures de la diffraction de Mie. On peut alors traiter le milieu comme un milieu effectif, où la diffusion se fait de façon quasi isotrope, avec des paramètres de diffusion effectifs empiriques, et que l'on ne relie jamais à la théorie de Mie : le calcul est bien trop compliqué<sup>2</sup> !

Une bonne illustration de ce passage est ce que l'on observe en pratique avec des pigments nacrés dans une peinture : déposés à très faible concentration sur un support transparent ou noir, on voit très nettement des irisations. Déposés en couches épaisses, ces nacres se comportent comme des pigments métalliques (dorés ou argentés) et les effets d'irisation disparaissent très rapidement. Ils apparaissent et on peut alors les décrire comme des pigments ordinaires.

En résumé, la théorie du transfert telle que nous allons la présenter est bien adaptée pour décrire des milieux présentant une diffusion multiple, avec des paramètres de diffusion qui seront souvent obtenus par un fit empirique des données observées, plutôt que par un calcul *ab initio*.

Il est par ailleurs clair que la théorie du transfert radiatif présente une parenté assez forte avec la théorie classique de la diffusion : dans le cas du transfert radiatif, on décrit la répartition angulaire détaillée des flux. Dans le cas de l'équation

---

1. Cependant l'indicatrice de diffusion peut tenir compte d'effets de diffraction par les diffuseurs individuels, comme dans le cas des nacres interférentielles par exemples.

2. sauf lorsque celle ci est isotrope, à basse énergie (diffusion en onde S ou P)

de la diffusion le flux est global, et la répartition angulaire n'est pas prise en compte. On comprend qualitativement que très à l'intérieur d'un milieu diffusant de façon efficace, le transfert radiatif dégénère en équation de la diffusion : le détail fin de la répartition angulaire des flux est "lavé" par la diffusion, et n'intervient plus dans la description de la propagation. Le classique "problème de Milne" consiste en particulier à recoller une solution de type diffusion à une solution de type transfert radiatif en surface du milieu.

Notons enfin qu'une approche totalement différente de ces phénomènes, et complémentaire de celle présentée ici, consiste à utiliser des méthodes de tracé de rayons avec des techniques Monte Carlo, pour simuler la propagation d'un grand nombre de "photons" dans un milieu aléatoire. Cela permet de résoudre des problèmes inabordable classiquement, au détriment de la compréhension détaillée de la physique du modèle ("what you get is what you see"!).

## 1.2 Bref historique et domaines d'applications.

La théorie du transfert radiatif a vu le jour à la fin du XIX<sup>ème</sup> siècle, avec le calcul par Rayleigh de la diffusion de la lumière par l'atmosphère et l'explication quantitative du ciel bleu. Au début du XX<sup>ème</sup> siècle, Schuster (1905) propose des équations très simples pour décrire la propagation de la lumière dans les nébuleuses interstellaires. La théorie voit son essor dans la communauté des astrophysiciens durant la première moitié de ce siècle, pour culminer avec les travaux classiques de Chandrasekhar sur l'équilibre radiatif des étoiles (Chandrasekhar - 1960 [1, 2]). Elle est parallèlement utilisée dans des domaines appliqués très variés, en particulier la théorie des couches pigmentées (travaux de Kubelka-Munk-Saunderson [6], puis de Marcus et Pierce [7]). Parmi ses nombreux domaines d'application citons (Cf. Van de Hulst-1980 [4]) :

- la propagation de la lumière dans les atmosphères stellaires et planétaires.
- la propagation de la lumière dans les mers et océans (sondage en océanographie).
- Descriptions des peintures et pigments (formulation des mélanges pigmentaires).
- Applications dans le domaine médical à la propagation de la lumière dans les tissus (diagnostics).
- Aspects des nuages, des brumes et brouillards.
- Réflexion de la lumière sur la canopée. . .

Notons également que les idées du transfert radiatif ont été recyclées au cours des années 1940-50 dans la neutronique, décrivant le ralentissement et la thermalisation des neutrons dans un milieu absorbant et diffusant, éventuellement multiplicateur (pour une brève introduction voir par exemple L.C. Woods - 1960 [5]).

Il est également amusant de constater des liens avec l'acoustique des salles (notion de champ diffus).

Ces quelques exemples montrent l'importance pratique de cette théorie. On peut en particulier affirmer que la compréhension de tout ce que l'on voit autour de soi passe par une compréhension plus ou moins poussée du transfert radiatif!

### 1.3 quand ne pas utiliser la théorie du transfert radiatif?

Ce qui précède donne quelques idées sur les cas où la théorie complète n'est pas nécessaire : à l'intérieur d'un milieu fortement diffusant, il suffit d'avoir une description de la propagation par l'équation de la diffusion, qui est beaucoup plus simple à traiter. C'est ce que l'on fait en pratique dans les études de neutronique, où on est principalement intéressé par ce qui se passe dans le bulk, et non pas en surface du milieu multiplicateur. A contrario, dès que l'on souhaite une description correcte au voisinage de la surface du milieu (quelques distances de diffusion), on doit utiliser le transfert radiatif, comme par exemple dans le problème classique de l'obscurcissement du disque solaire, ou la description des peintures à effet. C'est aussi l'outil indispensable des sondages (qu'y a-t-il sous l'atmosphère de Vénus?)

### 1.4 Voyage dans un verre de menthe à l'eau.

Une description qualitative des phénomènes mis en jeu, et la relation avec ce que l'on perçoit, est ici utile.

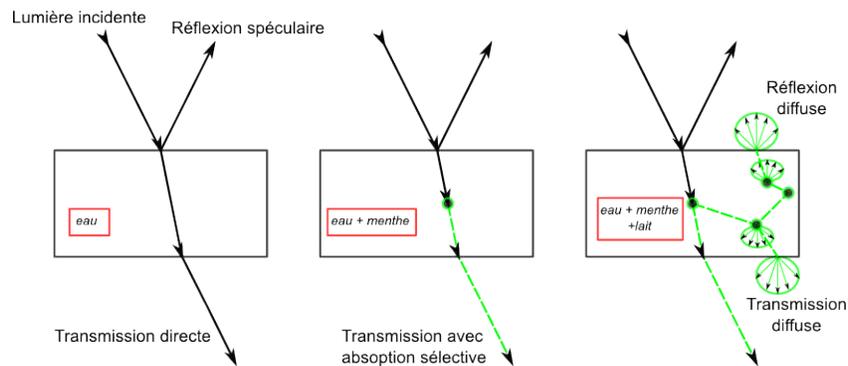


FIGURE 1 – Absorption et diffusion dans un milieu. Noter que la réflexion-réfraction de surface se produit également pour les flux diffus.

Observons la lumière se propager dans un verre d'eau. Tout étudiant sait que la propagation se fait sans absorption et en ligne droite, avec des phénomènes de réflexion et de réfraction à la surface de l'eau. La réflexion observée, due à la discontinuité entre milieux, est dite réflexion spéculaire (du latin *speculum* : miroir), et suit les lois de Descartes. En dehors de la déformation des images due à la réfraction, et au faible reflet dû à la réflexion spéculaire, l'eau n'altère

pas la propagation de la lumière, et les images des objets se forment à travers le verre.

Rajoutons alors quelques gouttes de sirop de menthe à notre breuvage. On continue à voir les images se former à travers le verre, mais colorées en vert. Ceci traduit la propagation de la lumière sans diffusion (pas de changement de direction), mais avec une absorption qui dépend de la longueur d'onde. On parle d'absorption sélective. C'est elle qui est responsable de la couleur : on perçoit la couleur complémentaire de celle qui a été absorbée. La théorie associée est la loi de Beer Lambert (Cf. section 5.2), qui permet de prédire la couleur en fonction de la dilution, de la forme du verre. . . Noter aussi qu'un verre de menthe très épais paraîtra toujours noir : toute la lumière de rétroéclairage qui nous parvenait de derrière le verre a été absorbée.

Enfin, selon son goût, on rajoute quelques gouttes de lait ou de pastis à notre mélange : pour le transfert radiatif, l'effet est le même ! Immédiatement, le milieu se trouble, il devient turbide, les images ne se forment plus, bref, la lumière est diffusée, soit par les pelotes de caséine dans le cas du lait, soit par la précipitation de l'anéthol dans le cas du pastis. L'opacité est donc synonyme de diffusion. Elle se produit efficacement à 2 conditions :

- Des particules de taille voisines de la longueur d'onde doivent être présentes dans le milieu. Pour le visible, l'ordre de grandeur est le micromètre.
- L'indice optique de ces particules doit être très différent de celui du milieu environnant.

Ce dernier résultat explique les changements de couleur du sable et du plâtre lorsqu'on les mouille : à sec, l'indice du milieu environnant est 1, mouillé il vaut 1.33, ce qui comparé au 1.5 de la silice conduit à une diffusion beaucoup moins efficace. On voit donc mieux la couleur de la roche ! On explique aussi de cette façon les belles couleurs évanescentes des galets mouillés. De façon similaire, du verre pilé de façon de plus en plus fine présente un aspect de plus en plus blanc, car la diffusion par les interfaces air-verre augmente. La lumière ressort du milieu avant d'avoir été absorbée dans les fragments de verre, sauf si on le mouille.

Notons enfin l'effet amusant suivant : on mélange une peinture blanche (diffusant pur) à une peinture noire (absorbant à toutes les longueurs d'ondes). Le mélange obtenu est un gris légèrement bleu, quelle que soit la qualité et la pureté de la peinture utilisée ! Cet effet est bien connu des peintres, qui le neutralisent en ajoutant une pointe d'ocre pour obtenir un gris neutre. En fait la diffusion de la lumière bleue est plus efficace que celle du rouge (diffusion Rayleigh) et la lumière bleue sort donc du milieu plus souvent avant d'avoir été absorbé. (Question : pourquoi ne voit on pas l'effet avec du blanc pur, ou du noir pur ?)

Dans le cas des peintures, des cosmétiques... le diffusant est soit du monoxyde de Zinc  $ZnO$ , soit du dioxyde de Titane  $TiO_2$  (PbO, le "blanc de cèruse", qui a donné son nom à une marque de peinture, est maintenant interdit). Pour le papier, ce sont les fibres de cellulose qui assurent la diffusion, et donnent l'aspect blanc. Pour les nuages et le brouillard ce sont des gouttes d'eau ou des cristaux

de glace, ainsi que dans le cas de la neige, mais dans tous les cas, on retrouvera des particules de taille micrométrique.

Tous ces exemples permettent de se faire une idée de la compétition entre diffusion et absorption que nous voulons décrire à travers la théorie du transfert radiatif. C'est bien l'aspect des objets qui nous entourent qui est en jeu ici.

### 1.5 Le problème type.

Un problème type de transfert radiatif se décrit en pratique de la façon suivante : on donne les caractéristiques d'absorption et de diffusion des matériaux en présence et la géométrie du problème (nombre et répartition des couches). On indique comme conditions aux bord du problème les caractéristiques des flux de lumière incidents (flux diffus, collimaté, composition spectrale...), ainsi que les conditions aux interfaces (continuité des flux avec réfraction, réflexion spéculaire ou diffuse, absorption...). On veut alors déterminer la répartition du flux dans tout le matériau. On pourra ainsi calculer les flux sortant, et en déduire les réflectance et transmittance de ce milieu. On aura également souvent à faire face au problème inverse, qui consiste à déduire les caractéristiques du milieu des réflectances et transmittances mesurés, et en particulier sa composition, mais aussi éventuellement les conditions au bord du problème (quelle est la couleur de vénus sous son atmosphère?). Nous verrons par la suite quelques exemples de cette démarche.

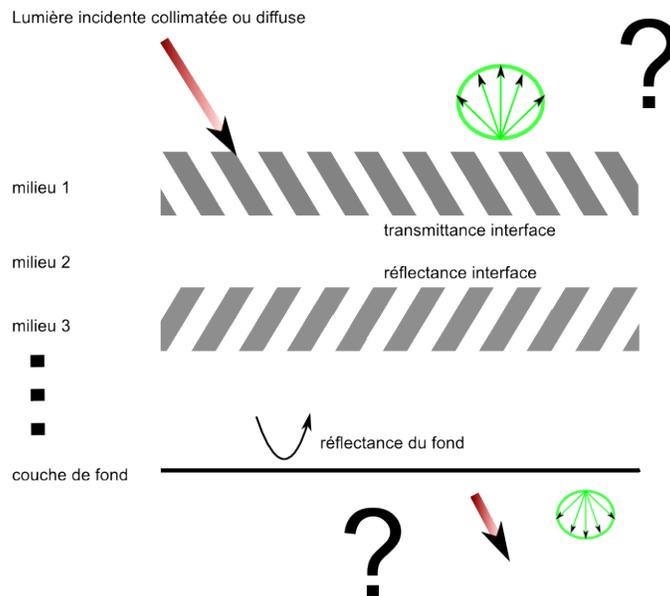


FIGURE 2 – Le problème du transfert radiatif : qu'est ce qui sort ?

Remarquons enfin que l'observateur n'est pas toujours placé à l'extérieur de milieu : quand nous sommes sous une couche de nuages, nous sommes nous mêmes les petits démons observateurs plongés dans le matériau, et posés sur la couche du fond : le sol!

## 2 Photométrie.

La photométrie est la science souvent mal aimée et maltraitée qui à trait à la mesure des quantités de lumière. D'une part c'est un domaine expérimental compliqué, car la lumière passe son temps à fuir par tous les trous mis à sa disposition, et des écarts de facteur 2 par rapport à ce qu'on devrait trouver sont très courants. D'autre part, on y croise une jungle de grandeurs répondants aux doux noms de luminances, candela, lux... et en général c'est un peu confus. Cela étant, c'est un savoir très utile, et qui livre une quantité d'applications pratiques à qui sait l'appivoiser ! Voyons un peu ce qu'il en est.

### 2.1 Différentes photométries.

La première difficulté avec la photométrie, c'est qu'il en existe deux, élaborées de façon initialement indépendantes par les physiciens, et par les opticiens : la photométrie énergétique et la photométrie visuelle, ou lumineuse. Toutes les grandeurs sont donc dupliquées. Cela étant, la différence entre les deux est facile à comprendre : la photométrie énergétique s'intéresse à tous les types de rayonnements (X, UV, visible, IR ...). La photométrie visuelle s'intéresse à la partie visible du spectre électromagnétique. Pour la vision diurne, la relation entre les deux types de photométrie est donnée par la relation

$$I_v(\lambda) = K_m V(\lambda) I_e(\lambda) \quad (1)$$

où  $I_e(\lambda)$  est une grandeur photométrique énergétique, par exemple une intensité, et  $I_v(\lambda)$  est la grandeur visuelle correspondante.  $V(\lambda)$  est le coefficient d'efficacité relatif de l'oeil, qui traduit la sensibilité de notre capteur favori :  $V(\lambda)$  est non nul dans le domaine du visible, entre 400 et 700 nm, et son maximum se situe dans le vert-jaune, à  $\lambda = 555$  nm , comme on le voit figure (3) ci-dessous.

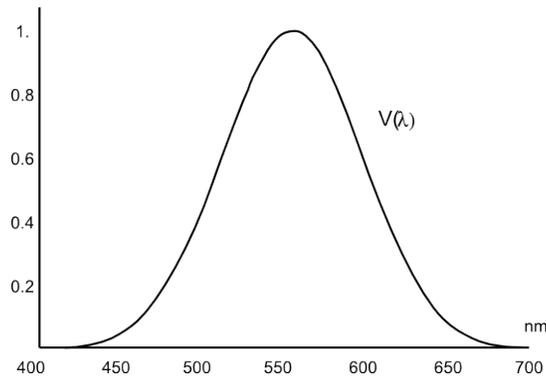


FIGURE 3 – Coefficient d'efficacité relative de l'oeil

$K_m = 683$  Lumen/watt est une constante dont l'utilisée est historique : les deux photométries ont été développées indépendamment, il a fallu relier les grandeurs entre elles. En pratique  $K_m$  donne la valeur maximum du rendement photométrique d'une source lumineuse<sup>3</sup>. Notons enfin que pour la photométrie nocturne, la relation présente la même forme, avec une constante et une courbe de sensibilité différentes.

Une autre difficulté apparaît : la photométrie peut être globale, comme avec l'oeil, ou spectrale, lorsqu'on utilise un spectromètre. La relation entre les deux types de grandeur est de la forme

$$I_{eT} = \int I_e(\lambda) d\lambda \quad (2)$$

sur le domaine spectral envisagé.  $I_e(\lambda)$  est alors une *densité spectrale énergétique*, et s'exprime en unité énergétique par nanomètre.

On peut alors définir le coefficient d'efficacité moyen de l'oeil (ou d'un capteur) par la relation :  $I_{vT} = K_m \bar{V} I_{eT}$ , ce qui conduit immédiatement à la relation

$$\bar{V} = \frac{\int_{400}^{700} V(\lambda) I_e(\lambda) d\lambda}{\int_{400}^{700} I_e(\lambda) d\lambda} \quad (3)$$

Pour la lumière blanche, ce coefficient moyen vaut environ 0.3 relativement à la partie visible.

## 2.2 La photométrie énergétique.

La situation type est schématisé sur la figure suivante, que nous allons suivre de la source au détecteur :

### 2.2.1 Flux.

La grandeur de base est bien sur le flux énergétique  $\phi_e$ , mesuré en watt. Il permet de mesurer le débit énergétique d'une source, d'un pinceau de lumière... En régime stationnaire, une ampoule à incandescence de 75 Watts débite un flux de 75 Watts, mais bien entendu, principalement dans l'infra rouge. Dans la pratique les flux sont souvent de l'ordre du Watt pour les sources usuelles, mais pour le soleil par exemple, c'est un peu plus !

---

3. Pour une ampoule à filament de tungstène, le rendement vaut environ 10 lm/watt. Pour les diodes, on atteint actuellement environ 100 lm/watt.

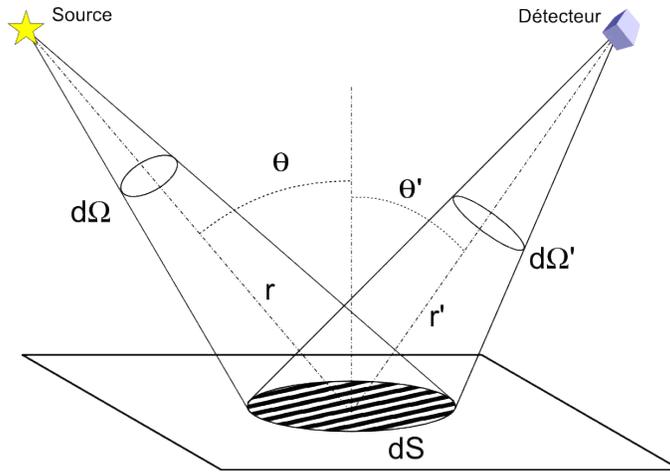


FIGURE 4 – Une situation photométrique générale

### 2.2.2 Intensité.

La plupart du temps, on est plus intéressé par savoir comment on concentre la puissance du faisceau que par sa puissance elle même. Un phare, un spot, un réflecteur sont là pour concentrer la lumière, et augmenter son intensité. Celle ci est définie comme le flux par unité angle solide, comme sur la figure ci dessous :

$$I_e = \frac{d\phi_e}{d\Omega} \quad (4)$$

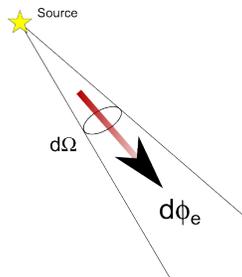


FIGURE 5 – Intensité

Un Laser He-Ne de flux valant quelques milliwatts peut atteindre de très grandes intensités. Pour une source isotrope, on a  $I_e = \phi_e/4\pi$ . Si on utilise un miroir ou un plan diffuseur blanc comme abat-jour, on double l'intensité de la source. L'intensité s'exprime en Watt/Stéradian.

### 2.2.3 Eclairage.

L'éclairage est une grandeur essentielle en photométrie, puisque c'est toujours lui que l'on détecte. Il mesure le flux incident par unité de surface

$$E_e = \frac{d\phi_e}{dS}$$

et s'exprime donc en Watt/m<sup>2</sup>. Pour le pinceau de lumière incident concentré dans l'angle solide  $d\Omega = \frac{\cos(\theta)dS}{r^2}$ , et de flux  $d\phi_e = I_e d\Omega$ , on obtient immédiatement :

$$E_e = \frac{I_e \cos(\theta)}{r^2} \quad (5)$$

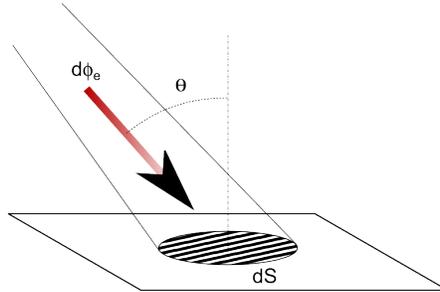


FIGURE 6 – Eclairage

Ce résultat essentiel s'appelle la loi de Bouguer. Il indique comment l'éclairage varie en fonction de la distance à la source : si on double celle-ci, l'éclairage est divisé par 4. Il fait plus froid sur Mars que sur la terre, où le flux solaire au zénith est ce qu'on appelle la *constante solaire*, valant environ  $C \simeq 1000W$ . On voit aussi l'influence du facteur d'inclinaison (il fait plus froid aux pôles) que nous allons retrouver un peu partout dans ce cours.

### 2.2.4 Emittance et réflectance.

L'émission est la notion duale de l'éclairage pour l'émission. Si on note  $d\phi'_e$  le flux total renvoyé par la surface  $dS$ , on a

$$M_e = \frac{d\phi'_e}{dS}$$

On définit alors la réflectance globale de la surface

$$R = \frac{M_e}{E_e} \quad (6)$$

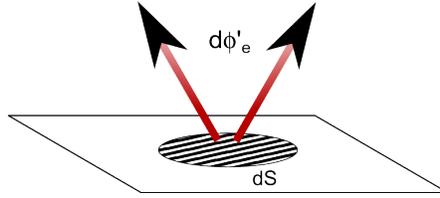


FIGURE 7 – Emittance

qui est sans dimension. La réflectance varie en général avec la longueur d'onde, et cette dépendance reliée à la couleur de l'objet est mesurée par un *spectrocolorimètre*. Bien entendu, dans le cas d'une réflexion, la réflectance globale est inférieure à 1, ce qui traduit la conservation de l'énergie. On peut toutefois observer couramment des réflectances spectrales plus grande que 1 dans le cas des fluorescents : le flux incident dans l'UV est réémis dans le visible.

### 2.2.5 Luminance.

Si on s'intéresse maintenant à la répartition angulaire de la lumière (ré)émise par une surface, le concept clé est celui de *luminance* :

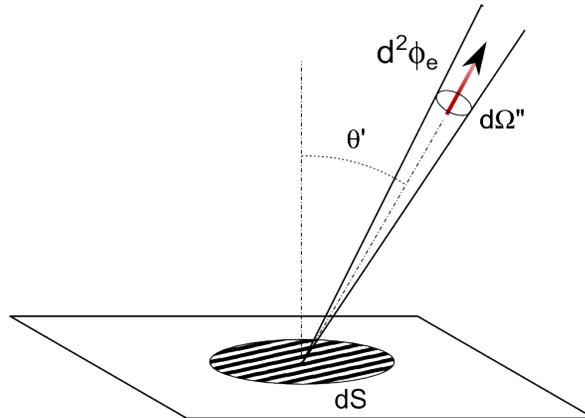


FIGURE 8 – Loi de Lambert et Luminance

Cette grandeur est reliée à la loi de Lambert : une grande classe de matériaux diffusants, dits lambertiens, ont une répartition angulaire de flux émis qui varie comme  $\cos(\theta')$ . Du point de vue pratique, ces objets sont mats, sans aspect de brillant<sup>4</sup>. On définit alors la luminance par

$$d^2\phi_e = L_e \cos(\theta') dS d\Omega'' \quad (7)$$

4. On observe aussi la loi de Lambert en émission : un corps noir est parfaitement Lambertien. Voir la suite de ce cours pour comprendre d'où provient ce comportement.

La luminance s'exprime en Watts/m<sup>2</sup>/Stéradian. Lorsque la surface est Lambertienne, la luminance est indépendante de la direction d'observation. A contrario, pour une surface non Lambertienne, une surface brillante par exemple, la luminance dépend de la direction de sortie, et cette dépendance dépend de la direction du flux entrant. Dans le cas d'une surface Lambertienne, on peut calculer facilement l'émittance,

$$M_e = \int_{\cos \theta' \geq 0} L_e \cos(\theta') d\Omega' = L_e \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^{\pi/2} d\theta' \cos(\theta') \sin(\theta') = \pi L_e \quad (8)$$

et on en déduit une expression alternative de la réflectance :

$$R = \frac{\pi L_e}{E_e} \quad (9)$$

Cette relation peut alors s'étendre au cas non Lambertien, et conduit à la définition de la BRDF (bidirectional reflection density function) : la surface éclairée dans une direction d'incidence  $\vec{\Omega}$  présente une luminance  $L_e(\vec{\Omega}')$  dans la direction de sortie  $\vec{\Omega}'$ . La BRDF vaut alors

$$R(\vec{\Omega}', \vec{\Omega}) = \frac{\pi L_e(\vec{\Omega}')}{E_e(\vec{\Omega})} \quad (10)$$

Pour un objet lambertien, la BRDF est constante et s'identifie à la réflectance. Pour un diffuseur blanc idéal (dont le Spectralon<sup>TM</sup> donne une bonne idée), on a  $R=1$ .

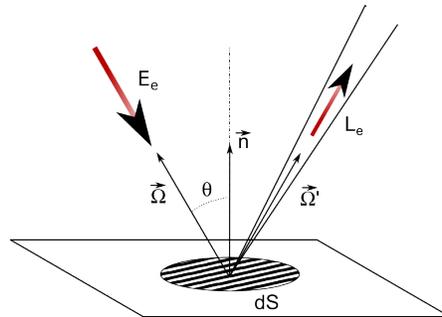


FIGURE 9 – Définition de la BRDF

Ici  $\vec{\Omega}$  et  $\vec{\Omega}'$  et  $\vec{n}$  sont des vecteurs *unitaires* repérant les directions d'entrée et de sortie de la lumière, ainsi que la normale à la surface. Tous ces vecteurs sont orientés vers l'extérieur du milieu.

Terminons maintenant notre chaîne photométrique en regardant ce qui arrive au capteur en bout de chaîne. celui-ci placé à une distance  $r'$  de  $dS$ , présente une pupille d'entrée notée  $\sigma$ , inclinée d'un angle  $\alpha$  par rapport à la direction de sortie  $\vec{\Omega}'$ . il est donc sous-tendu par un angle solide<sup>5</sup>

$$d\Omega'' = \frac{\sigma \cos \alpha}{r'^2}$$

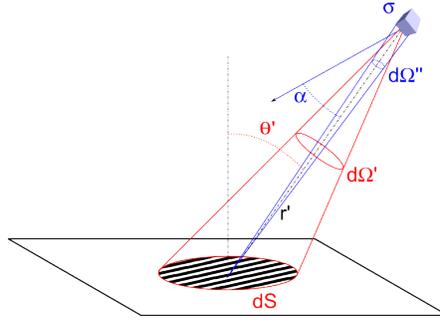


FIGURE 10 – Eclairage au niveau du capteur.

Le flux qui arrive sur le capteur en provenance de  $dS$  vaut donc

$$d^2\phi_e = L_e \cos(\theta') dS d\Omega'' = L_e \frac{\cos(\theta') \cos(\alpha) \sigma dS}{r'^2}$$

<sup>6</sup>ce qui donne un éclairage au niveau du capteur

$$e_e = \frac{d^2\phi_e}{\sigma} = L_e d\Omega' \cos(\alpha) \quad (11)$$

On voit que la luminance donne directement la quantité de lumière enregistrée au niveau du capteur de façon très simple. Cette expression est tout à fait remarquable : pour un détecteur d'ouverture angulaire donnée ( $d\Omega'$  fixé) orienté vers l'objet à mesurer ( $\cos(\alpha) = 1$ ), l'éclairage ne dépend plus de la distance de l'objet, ni de son orientation ! On peut vérifier ce résultat en orientant un luxmètre vers un mur éclairé : l'éclairage obtenu ne dépend pas de la distance au mur, ni de l'orientation du luxmètre. En effet si on écarte le détecteur de la surface, chaque point source contribue en  $1/r^2$  suivant la loi de Bouguer, mais la surface qui contribue augmente comme  $r^2$ , et les deux effets se compensent. L'effet est similaire pour l'inclinaison : chaque point de la source contribue comme  $\cos(\theta')$  (loi de Lambert), mais la surface qui contribue augmente comme  $1/\cos(\theta')$ . On ne peut donc pas déterminer la géométrie d'un objet Lambertien d'après son aspect, et c'est ce qui fait que les braises d'un feu présentent

5. attention à ne pas confondre les deux angles tête-bêche  $d\Omega'$  et  $d\Omega''$  !

6. Les connaisseurs auront reconnu l'étendue géométrique du faisceau  $\frac{\cos(\theta') \cos(\alpha) \sigma dS}{r'^2}$

un aspect indéfini, sans relief. Dans le même ordre d'idée, le fait que le disque solaire semble plus sombre au bord qu'en son centre montre directement que l'émission du soleil n'est pas Lambertienne, ce qui pour un corps noir de cette taille semble assez perturbant ! (Problème de l'obscurcissement du disque solaire). Au passage, la pleine Lune présente aussi un disque non uniforme, mais ici, c'est l'éclairement non uniforme du au  $\cos(\theta)$  qui est en jeu, car la Lune est une réflecteur Lambertien, de réflectance (Albédo)  $R \simeq 7\%$ <sup>7</sup>.

### 2.3 La photométrie lumineuse.

En multipliant toutes les densités spectrales énergétiques par  $K_m V(\lambda)$ , on obtient un copier-collé du paragraphe précédent en photométrie visuelle, et toutes les relations géométriques entre grandeurs restent valables :

- Le flux lumineux s'exprime en Lumen. Ordre de grandeur pour une ampoule : 100 Lm.
- L'intensité s'exprime en Candela (unité de base du SI) : une bougie a une intensité de l'ordre de 1 Cd.
- L'éclairement s'exprime en Lux. Un éclairage de travail correct correspond à environ 150 Lux. En plein soleil, on obtient des valeurs de l'ordre de  $10^5$  Lux. La nuit de pleine lune correspond à environ 1 Lux. Le seuil absolu de l'oeil se situe vers  $10^{-5}$  Lux. En dessous de cet éclairage, c'est le noir !
- Enfin les luminances s'expriment en nits, ou  $\text{Cd}/\text{m}^2$ . Pour donner une idée, la luminance de l'écran d'un Macbook Pro environ  $100 \text{ Cd}/\text{m}^2$ .

Bien entendu, vous êtes invités à calculer les ordres de grandeurs de chaines photométriques simples, pour vous familiariser avec ces notions. C'est très utile en pratique, et très amusant.

### 2.4 Exemple d'applications : le four à pain et la sphère intégrante.

La théorie des enceintes de rayonnement permet une application non triviale des notions vues ci dessus. De plus, cela nous permettra d'introduire la notion d'*équation intégrale*, et quelques techniques utiles à leurs sujets. Considérons tout d'abord une enceinte fermée de forme convexe, et de revêtement interne Lambertien, et posons nous la question de l'existence possible d'un rayonnement à l'intérieur. Si il n'y a pas de sources la réponse est simple, ce qui en fait un problème bien posé au sens de Wheeler, et nous permet de l'aborder sereinement.

Considérons un point  $M$  de la surface. Celui ci reçoit de tous les autres point  $P$  un rayonnement, dont l'éclairement vaut, d'après l'équation (11)

$$E(M) = \iint_P L(P) \frac{\cos(\theta_M) \cos(\theta_P)}{MP^2} dS_P$$

---

7. c'est un objet noir sur un fond très très noir, éclairé par un très gros spot !

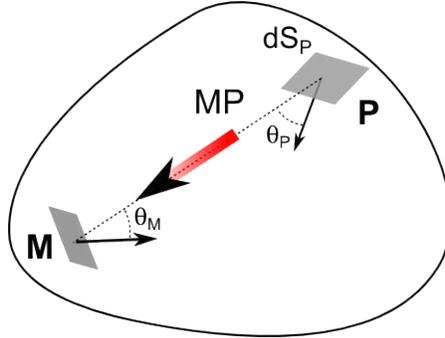


FIGURE 11 – enceinte fermée

Comme la surface est Lambertienne, la luminance en  $M$  vaut  $R(M)E(M)/\pi$ , et on a donc pour la fonction  $L(M)$  l'équation intégrale

$$L(M) = \frac{R(M)}{\pi} \iint_P L(P) \frac{\cos(\theta_M) \cos(\theta_P)}{MP^2} dS_P \quad (12)$$

Ce type d'équation est très courant en physique, même si on a plus l'habitude des équations différentielles. Les équadiffs sont plus intuitives, car elles décrivent le comportement local de la fonction, là où une équation intégrale est non locale. Cela dit, on dispose d'un arsenal de théorème concernant leur solutions, et leur résolution numérique est souvent plus stable que celle des équadiffs.

Dans le cas présent, l'équation (12) est linéaire, et s'appelle équation de Fredholm de 1<sup>ère</sup> espèce. On montre par itération que si la moyenne de la réflectance sur l'enceinte  $\bar{R} < 1$ , la solution est unique. Comme  $L(M) = 0$  est manifestement une solution, il n'y a pas de rayonnement dans l'enceinte ce qui est bien entendu le résultat attendu.

Si  $R(M) \equiv 1$ , on vérifie immédiatement que toute fonction  $L = \text{constante}$  est solution (*exercice* : le montrer)<sup>8</sup>. On voit que les théorèmes d'unicité ne sont pas fait pour les chiens, et que ce résultat non physique traduit un flux de lumière enfermé dans une enceinte, et se réfléchissant à l'infini. Il est remarquable de trouver que dans ce cas, la forme de l'enceinte n'a aucune influence sur la répartition de la lumière.

L'exemple précédent étant finalement un peu trivial, rajoutons des sources de lumière. Pour cela supposons que chaque point  $M$  de l'enceinte présente lui même une luminance propre  $L^{(0)}(M)$ , non due à la lumière émise par le reste de l'enceinte. C'est donc une enceinte émettrice. Il est alors facile de modifier l'équation (12) en

8. C'est exactement le même calcul que pour l'équation (8).

$$L(M) = L^{(0)}(M) + \frac{R(M)}{\pi} \iint_P L(P) \frac{\cos(\theta_M) \cos(\theta_P)}{MP^2} dS_P$$

dite équation de Fredholm de 2<sup>ème</sup> espèce, présentant un *terme de source*  $L^{(0)}(M)$ . Remarquez qu'en multipliant tout par  $\pi/R(M)$ , on peut obtenir une équation équivalente pour l'éclairement (*exercice* : le vérifier)

$$E(M) = E^{(0)}(M) + \frac{1}{\pi} \iint_P R(P) E(P) \frac{\cos(\theta_M) \cos(\theta_P)}{MP^2} dS_P$$

où le terme de source représenterait ici un éclairage direct de la paroi par des sources externes, et où la réflectance apparaît maintenant dans l'intégrale<sup>9</sup>.

L'itération de l'équation conduit à un résultat similaire d'unicité de la solution si  $\bar{R} < 1$ . C'est l'équation qui décrit l'équilibre du rayonnement dans un four à pain (corps noir). Nous allons la résoudre dans le cas simple où  $L^{(0)}$  et  $R$  sont constantes sur l'enceinte, ce qui est le cas dans un four à pain. Pour cela, on peut essayer de chercher une solution constante  $L$ . L'intégrale se calcule alors toujours par la même technique, et on trouve (*exercice* : le montrer)

$$L = \frac{L^{(0)}}{1 - \bar{R}}$$

qui est la seule solution, en vertu de l'unicité. On voit le rôle amplificateur du coefficient de réflexion de l'enceinte. Plus celui ci est grand, plus ça chauffe. C'est précisément le rôle de la brique réfractaire dans le four à pain.

Regardons maintenant ce qui se passe pour une sphère. Dans ce cas, la géométrie est très simple, et si on note  $a$  le rayon de la sphère, on a pour tout couple de points  $M$  et  $P$  (*exercice* : le montrer)

$$\frac{\cos(\theta_M) \cos(\theta_P)}{MP^2} = \frac{1}{4a^2}$$

et l'équation devient

$$E(M) = E^{(0)}(M) + \frac{1}{S} \iint_P R(P) E(P) dS_P$$

qui est cette fois facilement soluble pour toutes fonctions  $E^{(0)}(M)$  et  $R(M)$ . C'est ce qu'on appelle la théorie de la sphère intégrante d'Ulbricht. Il suffit en

---

9. Ce genre de transformation fait partie des techniques usuelles pour les équations intégrales.

effet de remarquer que l'intégrale est une constante  $K$  ne dépendant pas de la position  $M$ . On doit alors résoudre le système

$$K = \iint_P R(P) E(P) dS_P$$

$$E(M) = E^{(0)}(M) + \frac{1}{S} K$$

Dont la solution est immédiatement (*exercice* : le montrer)

$$E(M) = E^{(0)}(M) + \frac{\frac{1}{S} \iint_P R(P) E^{(0)}(P) dS_P}{1 - \bar{R}}$$

avec la réflectance moyenne de la sphère définie par  $\bar{R} = \frac{1}{S} \iint_P R(P) dS_P$ . Voyons comment cela s'applique dans le cas d'une sphère intégrante.

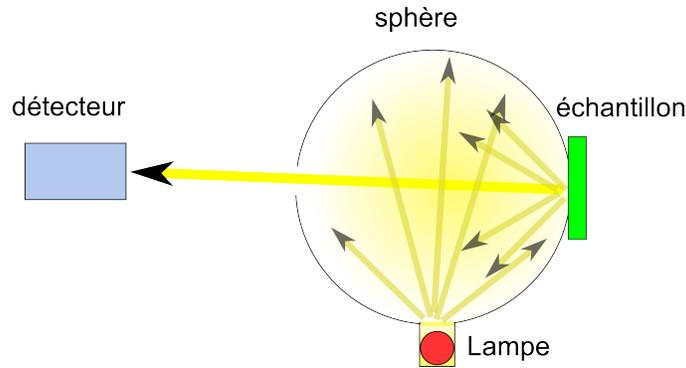


FIGURE 12 – Sphère intégrante de spectrocromimètre.

Celle-ci est en général constituée d'une surface Lambertienne blanche de surface  $S_w$  et de réflectance  $R_w$ , d'un échantillon à mesurer de surface  $S_{ech}$  et de réflectance  $R_{ech}$ , et d'un certain nombre de trous de surface  $S_h$  et de réflectance 0.  $\bar{R}$  vaut alors  $\bar{R} = R_w k_w + R_{ech} k_{ech}$ , où  $k_w = S_w/S$  et  $k_{ech} = S_{ech}/S$  sont les fractions surfaciques du diffuseur et de l'échantillon. L'échantillon n'étant pas éclairé directement par la source, la luminance de la surface de l'échantillon vaut (*exercice* : le montrer)

$$L_{ech} = \frac{R_{ech} E_{ech}}{\pi} = R_{ech} \frac{\phi_T}{\pi S} \frac{R_w}{(1 - \bar{R})}$$

qui va donner directement l'éclairement du capteur par la formule (11). Plusieurs caractéristiques du dispositif s'en déduisent :

- La réponse du capteur va dépendre de façon *non linéaire* de  $R_{ech}$  car  $\bar{R}$  dépend de  $R_{ech}$ . Cet effet est d'autant plus marqué que le port de mesure est grand, et traduit le fait que l'échantillon lui même modifie la sphère. Pour obtenir une réponse linéaire du capteur, on utilise un dispositif de *double faisceau* (voir ci-dessous).
- La sphère intégrante est un dispositif peu lumineux : le flux incident total de la lampe  $\phi_T$  est divisé par la surface de la sphère  $S$ . C'est d'ailleurs son rôle : répartir le flux uniformément.
- On voit toujours le rôle amplificateur de la sphère (terme  $1/(1 - \bar{R})$ ), qui compense un peu l'effet précédent.
- Le double faisceau correspond à un port qui mesure la surface blanche de la sphère par un système de miroirs. Ce port donne un résultat proportionnel à  $L_{ref} = R_w \frac{\phi_T}{\pi S} \frac{R_w}{(1-\bar{R})}$ . Le rapport de ce signal et du signal de mesure  $L_{ech}$  permet d'éliminer le terme non linéaire, et d'obtenir un résultat de mesure proportionnel à  $R_{ech}$  directement :  $L_{ech}/L_{ref} = R_{ech}/R_w$ .

A titre d'exercice, on regardera comment sont modifiés ces résultats si l'échantillon n'est pas Lambertien. On pourra également établir et résoudre l'équation correspondant à un angle de mur Lambertien éclairé uniformément.

## 3 Les grandeurs de la théorie du transfert.

### 3.1 Notations.

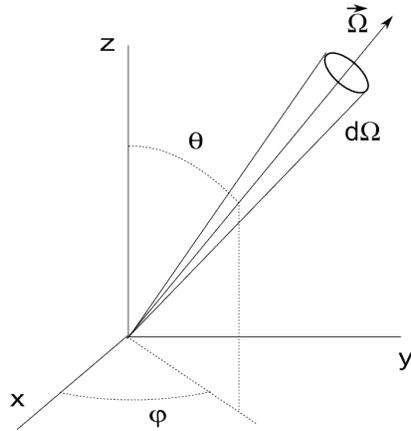


FIGURE 13 – Conventions et notations

Quelques remarques sur les conventions utilisées<sup>10</sup> :  $\vec{\Omega}$  est un vecteur *unitaire* repérant la direction de la lumière. Un système de coordonnées cartésiennes (0xyz) est défini pour la situation qui nous intéresse. Associé à ce système, on utilise des coordonnées sphériques  $(\theta, \varphi)$ , et on pose  $\mu \equiv \cos(\theta) = \vec{\Omega} \cdot \vec{e}_z$ . On a donc  $0 < \mu < 1$  pour un flux montant, et  $-1 < \mu < 0$  un flux descendant. L'élément différentiel d'angle solide s'écrit alors  $d\Omega = d\mu d\varphi$ . Noter qu'en surface, la convention est souvent différente : on utilise  $\mu > 0$  pour les flux entrant et sortant ! Pour couronner le tout, Chandrasekhar prend souvent une orientation de 0z vers le bas, ce qui est logique pour étudier un flux entrant dans le milieu... prudence, donc, et bien définir ses conventions.

### 3.2 La radiance.

#### 3.2.1 Définition.

La radiance (specific intensity en anglais) est la grandeur fondamentale de la théorie du transfert radiatif. Elle est l'analogie de la densité de particules dans l'espace des phases  $n(\vec{r}, \vec{v}, t)$  pour la théorie cinétique, ou le flux de neutrons en neutronique. Elle représente le flux dans la direction  $\vec{\Omega}$  à une position  $\vec{r}$  quelconque dans le milieu. Plus précisément

<sup>10</sup>. Remarquez que chaque auteur adopte ses propres conventions d'orientation, et en change parfois en cours de route (je ne fais pas exception). Attention donc aux erreurs de signe !

$$d^2\phi_e = I_e(\nu, \vec{\Omega}, \vec{r}, t) d\nu dS d\Omega$$

représente le flux énergétique à travers une surface  $dS$  et dans l'intervalle spectral  $d\nu$ , dans la direction  $\vec{\Omega}$ , à la position  $\vec{r}$  et à l'instant  $t$ . Notons que ici l'élément de surface  $dS$  est pris perpendiculaire à  $\vec{\Omega}$ .

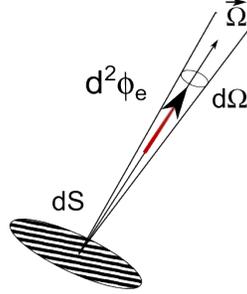


FIGURE 14 – Définition de la radiance.

Comme la plupart du temps les problèmes sont stationnaire, on ne considèrera pas ici la dépendance en  $t$ . De même, dans les problèmes que nous considérons, il n'y a pas de changement de fréquence de la lumière, et  $\nu$  joue le rôle de paramètre : il faut résoudre le problème à chaque fréquence, mais ces équations ne sont pas couplées entre elles. On n'indiquera donc pas la dépendance en  $\nu$ . Le problème du transfert radiatif peut donc se formuler comme "déterminer la radiance  $I_e(\vec{\Omega}, \vec{r})$  connaissant les sources et les caractéristiques du milieu". Nous allons voir l'équation du transfert radiatif (ETR), qui permet en principe de déterminer la radiance, mais avant cela, montrons comment la radiance donne accès à toutes les grandeurs photométriques vues précédemment.

### 3.2.2 Densité énergétique.

La densité énergétique spectrale en un point est reliée de façon simple à la radiance : les photons vont à la vitesse  $c$  et ont une énergie  $h\nu$ , donc la "densité de photons" allant dans la direction  $\vec{\Omega}$  vaut  $I_e/h\nu c$ , et la densité énergétique  $I_e/c$ . Il suffit d'intégrer sur toutes les directions pour obtenir la densité énergétique spectrale

$$u_e(\nu, \vec{r}) = \frac{1}{c} \int_{\Omega=4\pi} I_e(\nu, \vec{\Omega}, \vec{r}) d\Omega \quad (13)$$

### 3.2.3 Flux à travers une surface fixe.

Dans la définition de la radiance ci dessus, la surface  $dS$  était perpendiculaire à  $\vec{\Omega}$ . Lorsque la surface est fixe, le flux énergétique dans la direction  $\vec{\Omega}$  à travers

$dS$  vaut (*exercice* : expliquer pourquoi)

$$d^2\phi_e = I_e(\Omega, \vec{r}) (\vec{\Omega} \cdot \vec{n}) dS d\Omega = I_e(\Omega, \vec{r}) \cos(\theta) dS d\Omega \quad (14)$$

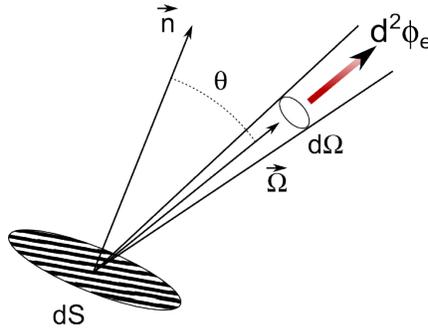


FIGURE 15 – flux à travers  $dS$  fixe.

On peut alors définir le vecteur densité de courant comme la moyenne

$$\vec{J}_e(\vec{r}) = \int I_e(\Omega, \vec{r}) \vec{\Omega} d\Omega \quad (15)$$

et le courant algébrique total à travers  $dS$  orienté par  $\vec{n}$  vaut  $J_{\vec{n}} = \vec{J}_e \cdot \vec{n} = J_+ - J_-$ , ou  $J_+$  et  $J_-$  sont les courants orientés “vers le haut” et “vers le bas” :

$$J_+ = \int_{(\vec{\Omega} \cdot \vec{n}) > 0} I_e(\Omega, \vec{r}) (\vec{\Omega} \cdot \vec{n}) d\Omega \quad , \quad J_- = \int_{(\vec{\Omega} \cdot \vec{n}) < 0} I_e(\Omega, \vec{r}) |\vec{\Omega} \cdot \vec{n}| d\Omega$$

$\vec{J}_e$  correspond à la notion familière de densité de courant vue en électricité, en théorie de la diffusion...

### 3.2.4 Exemples.

Deux exemples très simples et très utiles en pratique :

1. Flux isotrope :  $I_e$  est indépendant de la direction  $\vec{\Omega}$ . Dans ce cas,  $\vec{J}_e = 0$ , mais le flux à travers  $dS$  vaut  $d^2\phi_e = I_e \cos(\theta) dS d\Omega$ . On voit émerger la loi de Lambert comme un comportement naturel pour une distribution isotrope du flux, et on comprend beaucoup mieux pourquoi on la retrouve si souvent : elle correspond à une distribution isotrope de la lumière dans le matériau. Dans ce cas, on obtient immédiatement  $J_+ = \pi I_e$ , relation que nous avons déjà rencontrée à plusieurs reprises (*exercice* : faire ce calcul).

2. Flux totalement collimaté dans une direction  $\vec{\Omega}_0 = (\mu_0, \varphi_0)$  donnée : toute la lumière va dans la direction  $\vec{\Omega}_0$  et la radiance vaut

$$I_e(\mu, \varphi) = F \delta(\vec{\Omega} - \vec{\Omega}_0) = F \delta(\mu - \mu_0) \delta(\varphi - \varphi_0)$$

Dans ce cas, on a  $\vec{J}_e = F \vec{\Omega}_0$ , et  $J_{\vec{n}} = F \cos(\theta_0)$ .

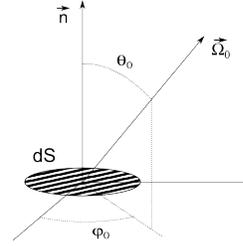


FIGURE 16 – flux collimaté

Ces exemples nous seront utiles par la suite.

### 3.3 Relation avec les quantités photométriques.

Si maintenant l'élément de surface  $dS$  correspond à la surface du matériau, et  $\vec{n}$  la normale orientée vers l'extérieur, On voit que d'après nos définitions,  $I_e(\vec{\Omega})$  s'identifie à la luminance  $L_e(\vec{\Omega})$  pour les  $\vec{\Omega}$  orientés vers l'extérieur ( $\vec{\Omega} \cdot \vec{n} > 0$ ),  $J_-$  correspond à l'éclairement, et  $J_+$  à l'émittance. Les quantités photométriques jouent donc le rôle de condition au bord pour l'ETR.

Voyons maintenant comment apparait la BRDF dans ce contexte. D'après la définition vue plus haut, celle ci est donnée par le rapport entre la luminance dans une direction  $\vec{\Omega}'$  divisée par l'éclairement dans la direction  $-\vec{\Omega}$ .

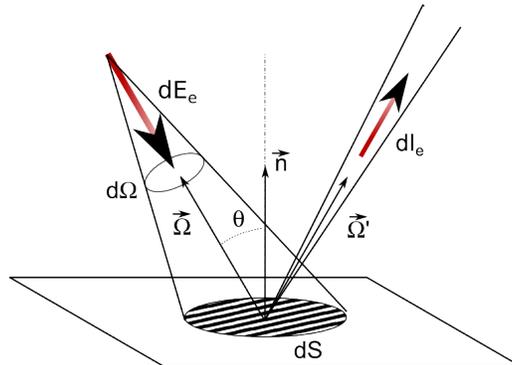


FIGURE 17 – La BRDF et la radiance.

En utilisant l'équation (14) pour calculer l'éclairement, et la relation entre radiance et luminance en surface, on obtient la relation fondamentale reliant les radiances entrantes et sortantes de la surface<sup>11</sup> :

$$dI_e(\vec{\Omega}') = \frac{1}{\pi} R(\vec{\Omega}', \vec{\Omega}) I_e(-\vec{\Omega}) \cos(\theta) d\Omega \quad (16)$$

En pratique, on veut la plupart du temps calculer la radiance totale sortant de la surface, due à toutes les directions incidentes, ce qui est obtenu en sommant la formule précédente :

$$I_e(\vec{\Omega}') = \frac{1}{\pi} \int_{(\vec{\Omega} \cdot \vec{n}) > 0} R(\vec{\Omega}', \vec{\Omega}) I_e(-\vec{\Omega}) (\vec{\Omega} \cdot \vec{n}) d\Omega \quad (17)$$

Cette relation est fondamentale dans la théorie du transfert radiatif. Elle trouve de nombreuses applications. Par exemple, si la BRDF est connue, elle permet de calculer une distribution sortante pour une distribution entrante donnée. Elle est par conséquent à la base de tous les calculs de "rendering" (simulation réaliste du rendu des objets sous des éclairages complexes).

On peut définir l'analogue de la BRDF pour la transmission, avec exactement les mêmes idées : l'objet correspondant s'appelle la BTDF, et permet de relier la radiance en sortie d'un milieu à celle entrant de l'autre côté suivant :

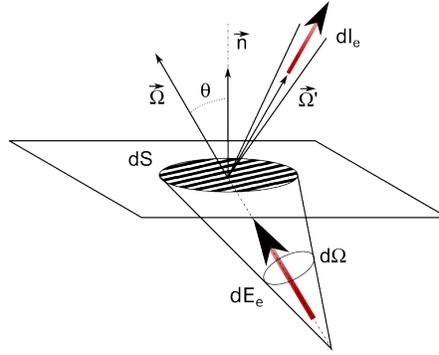


FIGURE 18 – BTDF.

$$I_e(\vec{\Omega}') = \frac{1}{\pi} \int_{(\vec{\Omega} \cdot \vec{n}) > 0} T(\vec{\Omega}', \vec{\Omega}) I_e(\vec{\Omega}) (\vec{\Omega} \cdot \vec{n}) d\Omega \quad (18)$$

Quelques remarques :

- remarquez la convention "matricielle" pour les directions dans les expressions ci dessus : la physique s'écrit de droite à gauche.

11. Attention aux conventions de signe : La BRDF utilise la plupart du temps des normales extérieures, mais le flux incident est vers le bas !

- La BRDF est un objet “lourd” du point de vue numérique : Elle dépend des 4 variables angulaires  $(\theta', \varphi', \theta, \varphi)$  et de la longueur d’onde. Si on veut un point tous les 5 degrés en sortie cela représente 1650 points sur la demi-sphère, multiplié par 20 angles d’incidence, multiplié par 32 longueurs d’ondes, c.a.d. 1 million de valeurs pour une résolution correcte !
- En stricte rigueur, la BRDF (et la BTDF) dépend aussi des position d’entrée et de sortie des pinceaux lumineux. On parle alors de BSSRDF. Cela traduit le fait qu’un photon rentre dans le matériau, diffuse, et ressort un peu plus loin. En pratique cela n’a d’utilité que au voisinage des changements de textures, lorsqu’on veut un rendu réaliste un peu diffus, comme à la séparation lèvres-visage par exemple.
- Pour la BTDF, le milieu peut avoir une épaisseur, contrairement à ce que montre le schéma.
- En raison d’un principe de retour inverse généralisé de la lumière (voir commentaire page 50) la BRDF et la BTDF sont symétriques :  $R(\vec{\Omega}', \vec{\Omega}) = R(\vec{\Omega}, \vec{\Omega}')$  et  $T(\vec{\Omega}', \vec{\Omega}) = T(\vec{\Omega}, \vec{\Omega}')$ , relations très utiles en pratique.

### 3.4 Réflectances et transmittances moyennées.

La plupart du temps, un spectrocolorimètre est équipé d’une sphère intégrante, soit en illumination, soit pour collecter la lumière diffusée par un échantillon. Dans ce cas, on obtient les valeurs moyennes de la BRDF et de la BTDF. Considérons le cas de la réflectance :

Dans un certain nombre de dispositifs, le flux incident sur la surface à mesurer est collimaté normal à l’échantillon<sup>12</sup>. La sphère intégrante qui surmonte l’échantillon collecte l’ensemble du flux réémis  $J_+$ . On voit donc que dans ce cas, on mesure en fait la valeur moyenne :

$$R_{0/D} = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} R(\mu', \varphi'; \mu_0 = 1) \mu' d\mu' d\varphi'$$

Lorsque la BRDF est indépendante de  $\varphi$ , et on obtient

$$R_{0/D} = \int_0^1 R(\mu', 1) 2\mu' d\mu'$$

Les sphères intégrantes sont également souvent utilisées comme un dispositif d’illumination diffus. Dans ce cas, le flux incident sur l’échantillon est isotrope, la radiance incidente  $I_e$  est une constante, on mesure le flux réémis normal à l’échantillon, et on obtient

$$R_{D/0} = \int_0^1 R(1, \mu) 2\mu d\mu$$

---

<sup>12</sup>. Sur la plupart des spectrocolorimètres, l’angle prend la valeur standardisée de 8° pour pouvoir mesurer le spéculaire.

Le principe de retour inverse généralisé montre que ces deux valeurs sont en principe égales :  $R_{0/D} = R_{D/0}$ .

Enfin, les dispositifs à double sphère, en illumination et en détection donnent la double moyenne

$$R_{D/D} = \int_0^1 R(\mu', \mu) 2\mu' d\mu' 2\mu d\mu$$

### 3.5 La réflexion et la transmission de Fresnel-Descartes.

L'interface entre deux couches d'indice différents offre un bon exemple de BRDF et BTDF. Cela nous permettra de bien comprendre la différence entre réflectance et coefficient de réflexion. En outre, c'est un résultat qui nous sera très utile par la suite, pour combiner les réflectances de différentes couches par exemple.

Les lois de Descartes pour la réflexion et la réfraction à l'interface entre un milieu d'indice 1 et un milieu d'indice  $n$  peuvent s'écrire :

$$\begin{aligned} \mu_r &= \mu_i & \varphi_r &= \varphi_i + \pi \\ n^2 (1 - \mu_t^2) &= (1 - \mu_i^2) & \varphi_t &= \varphi_i \end{aligned} \quad (19)$$

Ce qui donne pour les angles solides des pinceaux incidents et transmis  $n^2 d\Omega_t = d\Omega_i$ . Cette dernière relation exprime la concentration du faisceau lumineux produite par la réfraction (*exercice* : montrer cette relation).

Le coefficient de réflexion de Fresnel non polarisé vaut alors

$$r_F(\mu_i) = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{n\mu_t - \mu_i}{n\mu_t + \mu_i} \right)^2 + \left( \frac{n\mu_i - \mu_t}{n\mu_i + \mu_t} \right)^2 \right] \quad (20)$$

et le coefficient de transmission correspondant vaut  $t_F(\mu_i) = 1 - r_F(\mu_i)$ . Remarquer au passage le "principe" du retour inverse :  $t_{1 \rightarrow n}(\mu_i) = t_{n \rightarrow 1}(\mu_t)$ <sup>13</sup>.

Les expressions des réflectances et transmittances de Fresnel expriment les relations entre les flux entrant et sortant suivant les équations (17) et (18). Dans le cas qui nous concerne, on obtient (*exercice* : le montrer)

$$\begin{aligned} R_F(\mu', \varphi'; \mu, \varphi) &= r_F(\mu) \frac{\delta(\mu' - \mu)}{2\mu'} 2\pi \delta(\varphi' - \varphi - \pi) \\ T_{Fe}(\mu', \varphi'; \mu, \varphi) &= n^2 t_F(\mu) \frac{\delta\left(\mu - \sqrt{1 - n^2(1 - \mu'^2)}\right)}{2\mu} 2\pi \delta(\varphi' - \varphi) \end{aligned} \quad (21)$$

13. Notez aussi la forme très symétrique de ce coefficient : il est invariant si on échange  $\mu_i$  et  $\mu_t$  et aussi  $n \rightarrow 1/n$ .

On voit bien dans ces expressions la différence entre un *coefficient de transmission*, qui ne concerne que les flux d'énergie ( $d\phi_t = r_F d\phi_i$ ), et une *transmittance*, qui concerne la répartition angulaire. Notez aussi le facteur  $n^2$  qui traduit l'effet de concentration dû à la réfraction, et se déduit de la relation entre les flux.

## 4 L'équation du transfert radiatif.

L'équation du transfert radiatif (ETR) est une équation bilan de type équation de Boltzmann. Elle est cependant beaucoup plus simple que cette dernière : les particules n'interagissent pas entre elles, mais avec des diffuseurs-absorbeurs fixes. De plus, les flux et les diffuseurs sont traités dans l'approximation continue. Il en résulte une équation intégral-différentielle *linéaire*, beaucoup plus simple à étudier que l'équation de Boltzmann.

### 4.1 Dérivation de l'équation du transfert (ETR).

#### 4.1.1 Processus d'absorption.

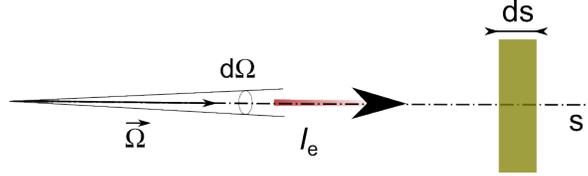


FIGURE 19 – processus d'absorption

On considère un flux de radiance  $I_e$  se propageant dans la direction  $\vec{\Omega}$ . Celui-ci décroît, en raison des processus d'absorption et de diffusion. Si on note  $s = \vec{\Omega} \cdot \vec{r}$  l'abscisse dans la direction du flux, on a

$$\frac{dI_e}{ds} = -\kappa_T I_e(\vec{\Omega}, \vec{r}) \quad (22)$$

$\kappa_T$  s'appelle le coefficient d'extinction total. Il dépend en général de la fréquence du rayonnement, de la position  $\vec{r}$ , mais pas de la direction du rayonnement  $\vec{\Omega}$ . D'une façon générale,  $\kappa_T$  est proportionnel à la concentration de centres diffuseurs-absorbeurs dans le matériau. Par la suite, nous supposons que le matériau est homogène par morceaux, c'est à dire que  $\kappa_T$  est constant, mais cette hypothèse n'est pas indispensable.

#### 4.1.2 Processus de diffusion.

D'une façon générale, une partie du flux incident sur un bloc de matériau va être diffusée dans une autre direction :

$$\left. \frac{d\phi_e}{ds} \right|_{\vec{\Omega} \rightarrow \vec{\Omega}'} = \kappa_T \frac{p(\vec{\Omega}', \vec{\Omega})}{4\pi} I_e(\vec{\Omega}) d\Omega d\Omega' \quad (23)$$

Ce résultat n'est pas évident : l'épaisseur du matériau traversée augmente avec l'inclinaison, mais l'éclairement diminue du même facteur  $\cos \theta$ . En d'autres

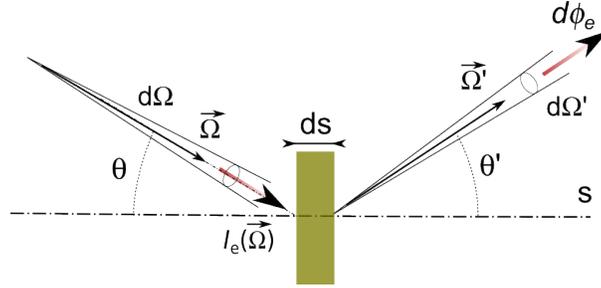


FIGURE 20 – processus de diffusion

termes, le nombre de centres diffuseurs rencontrés dans le matériau ne dépend pas de l'inclinaison du faisceau incident. La *fonction de phase*  $p(\vec{\Omega}', \vec{\Omega})$  donne la probabilité de diffuser de la direction  $\vec{\Omega}$  vers la direction  $\vec{\Omega}'$ , lorsque l'absorption a eu lieu. Comme on le verra, une fonction de phase constante et égale à 1 représente une diffusion isotrope totale (pas d'absorption).

On détermine alors la portion de rayonnement du faisceau incident qui a été diffusée :

$$\left. \frac{dI_e}{ds} \right|_{\vec{\Omega} \rightarrow 4\pi} = \kappa_T I_e(\vec{\Omega}) \int_{\Omega'} p(\vec{\Omega}', \vec{\Omega}) \frac{d\Omega'}{4\pi} = \omega_0 \kappa_T I_e(\vec{\Omega}) \quad (24)$$

La quantité  $\omega_0 \equiv \int_{\Omega'} p(\vec{\Omega}', \vec{\Omega}) \frac{d\Omega'}{4\pi}$  s'appelle *l'albédo* du matériau, et représente la fraction totale de rayonnement diffusé. On peut donc définir les coefficients de diffusion et d'absorption suivant :

$$\begin{aligned} \kappa_s &= \omega_0 \kappa_T \\ \kappa_a &= (1 - \omega_0) \kappa_T \end{aligned} \quad (25)$$

Lorsque le matériau est isotrope, la fonction de phase dépend en fait de l'angle de diffusion  $\cos[\Theta] = \vec{\Omega} \cdot \vec{\Omega}'$ . En exprimant les angles dans un système de coordonnées sphériques (Cf. figure (13)), on a

$$\cos[\Theta] = \mu\mu' + \sqrt{1 - \mu^2} \sqrt{1 - \mu'^2} \cos(\varphi - \varphi')$$

#### 4.1.3 Equation du transfert.

En réunissant les deux termes traduisant l'absorption et la diffusion, on obtient l'équation du transfert radiatif :

$$\frac{dI_e(\vec{\Omega}, \vec{r})}{ds} = -\kappa_T I_e(\vec{\Omega}, \vec{r}) + \kappa_T \int_{\Omega'} p(\vec{\Omega} \cdot \vec{\Omega}') I_e(\vec{\Omega}', \vec{r}) \frac{d\Omega'}{4\pi} \quad (26)$$

Il s'agit bien d'une équation *linéaire*, ce qui donne quelque espoir de pouvoir faire quelque chose avec ! Le milieu est ici décrit par la fonction de phase et le coefficient d'extinction, qui peuvent dépendre de la position  $\vec{r}$ .

## 4.2 Milieux stratifiés.

L'équation précédente est encore trop compliquée pour être utilisable. On utilise des hypothèses de symétrie plane ou sphérique pour la résoudre. Dans ce cours, nous supposons le milieu constitué de couches horizontales, suivant le schéma :

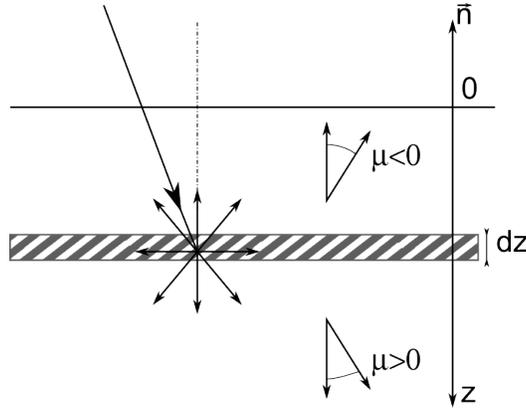


FIGURE 21 – Milieu stratifié

Attention aux conventions d'orientations, qui sont différentes de celles adoptées par Chandrasekhar : dans le milieu, l'axe  $0z$  est orienté vers l'intérieur du milieu, et les angles sont repérés par rapport à une normale *intérieure* au milieu. Dans ces conventions, on a  $ds = dz/\mu$ , et l'équation s'écrit

$$\begin{aligned} \mu \frac{dI_e(z, \mu, \varphi)}{dz} &= -\kappa_T I_e(z, \mu, \varphi) \\ &+ \kappa_T \int_{\Omega'} p [\mu\mu' + \sqrt{1-\mu^2} \sqrt{1-\mu'^2} \cos(\varphi-\varphi')] I_e(z, \mu', \varphi') \frac{d\mu' d\varphi'}{4\pi} \end{aligned}$$

Le coefficient d'extinction peut dépendre de  $z$ . Il est commode d'absorber cette variation dans l'épaisseur optique définie par  $d\tau = \kappa(z)dz$  :

$$\mu \frac{dI_e(\tau, \mu, \varphi)}{d\tau} = -I_e(\tau, \mu, \varphi) + \int_{\Omega'} p [\cos(\Theta)] I_e(\tau, \mu', \varphi') \frac{d\mu' d\varphi'}{4\pi} \quad (27)$$

qui est la forme que nous utiliserons par la suite.

### 4.3 Conditions aux limites.

L'ETR peut être considérée comme un système (infini!) d'équations différentielles linéaires couplées du premier ordre. Pour espérer la résoudre, il nous faut donner des conditions aux limites. Celles ci vont être reliées à la physique du problème, et en particulier aux flux entrants et sortants dans le milieu. En contemplant les équations (17) et (18) on voit que pour déterminer la BRDF, il suffit de résoudre l'ETR pour un flux incident collimaté dans la direction ( $\mu_0 > 0, \varphi_0 = 0$ ), donné par

$$I_e(\tau = 0, \mu > 0, \varphi) = F \delta(\mu - \mu_0) \delta(\varphi)$$

La BRDF est alors obtenue par le flux diffus sortant<sup>14</sup>, suivant (*exercice* : le monter)

$$R(-\mu, \varphi; \mu_0) = \frac{\pi I_e(\tau = 0, \mu < 0, \varphi)}{\mu_0 F} \quad (28)$$

Pour incorporer ces conditions aux limites de manière simple dans l'ETR, on pose

$$I_e(\tau, \mu, \varphi) = F \delta(\mu - \mu_0) \delta(\varphi) e^{-\tau/\mu_0} + I_{\text{diff}}(\tau, \mu, \varphi) \quad (29)$$

et  $I_{\text{diff}}$  vérifie l'équation (*exercice* : le monter) :

$$\begin{aligned} \mu \frac{dI_{\text{diff}}(\tau, \mu, \varphi)}{d\tau} &= -I_{\text{diff}}(\tau, \mu, \varphi) + \int_{\Omega'} p[\cos(\Theta)] I_{\text{diff}}(\tau, \mu', \varphi') \frac{d\mu' d\varphi'}{4\pi} \\ &+ \frac{F}{4\pi} p(\mu, \varphi; -\mu_0) e^{-\tau/\mu_0} \end{aligned} \quad (30)$$

avec les conditions aux limites  $I_{\text{diff}}(\tau = 0, \mu > 0, \varphi) = 0$ , qui traduisent l'absence de flux diffus incident. On voit que dans l'équation ci dessus, le terme collimaté incident apparait maintenant sous la forme d'un *terme de source* dans l'ETR, et que le terme en Dirac, impossible à traiter numériquement, est évacué de l'équation.

A titre d'exercice, on refera le traitement pour la transmittance, et on vérifiera qu'elle peut se calculer comme

$$T(\mu, \varphi; \mu_0) = e^{-L/\mu_0} \frac{\delta(\mu - \mu_0)}{2\mu_0} 2\pi \delta(\varphi) + \frac{\pi I_e(\tau = L, \mu > 0, \varphi)}{\mu_0 F} \quad (31)$$

pour  $\mu_0$  et  $\mu > 0$ , avec  $L$  l'épaisseur optique de la couche traversée.

### 4.4 Invariances.

Nous avons déjà utilisé l'invariance azimutale<sup>15</sup> en choisissant la direction d'incidence à  $\varphi_0 = 0$ . En intégrant l'équation du transfert sur l'angle  $\varphi$ , on obtient une équation sans dépendance azimutale

14. Notez que pour la BRDF, les arguments  $\mu$  sont pris positifs.

15. la fonction de phase ne dépend que de  $(\varphi - \varphi_0)$

$$\mu \frac{dI(\tau, \mu)}{d\tau} = -I(\tau, \mu) + \frac{1}{2} \int_{-1}^1 p(\mu, \mu') I(\tau, \mu') d\mu' + \frac{F}{4\pi} p(\mu; -\mu_0) e^{-\tau/\mu_0}$$

où on a défini les moyennes

$$p(\mu, \mu') = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p[\mu\mu' + \sqrt{1-\mu^2} \sqrt{1-\mu'^2} \cos(\varphi)] d\varphi$$

$$I(\tau, \mu) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} I(\tau, \mu, \varphi) d\varphi$$

Dans un milieu fortement diffusant, le flux est invariant suivant  $\varphi$  en profondeur<sup>16</sup>, et l'équation ci-dessus donne directement la radiance.

Dans le cas où la fonction de phase est *isotrope*  $p = \omega_0$ , l'équation (30) ne dépend pas de  $\varphi$ , les conditions aux limites sur le flux diffus non plus, et la partie diffuse du flux est indépendante de  $\varphi$ , alors que le flux incident avait une direction privilégiée  $\varphi_0 = 0$ ! On aboutit ici à la forme très simple de l'ETR :

$$\mu \frac{dI(\tau, \mu)}{d\tau} = -I(\tau, \mu) + \frac{\omega_0}{2} \int_{-1}^1 I(\tau, \mu') d\mu' + \frac{F}{4\pi} \omega_0 e^{-\tau/\mu_0} \quad (32)$$

Cette équation simplifiée présente plusieurs propriétés intéressantes :

- Elle est exactement soluble, moyennant l'introduction de quelques fonctions spéciales introduites par Chandrasekhar.
- Elle constitue donc un benchmark pour toutes les méthodes numériques.
- Malgré sa simplicité, elle a un intérêt physique : à basse énergie, la diffusion se fait en onde  $s$ , et est donc isotrope. Même dans les cas où la diffusion n'est pas isotrope, un grand nombre de diffusions produit un résultat équivalent. On pourra donc toujours décrire un milieu fortement diffusant par cette équation.

Nous allons voir plus loin des solutions exactes et approchées de cette équation. Pour l'instant, on va s'intéresser à des "poor man's ETR versions", modèles simplifiés qui permettent de comprendre la physique de l'ETR en restant à un niveau de calcul élémentaire.

---

<sup>16</sup>. Sous une couche nuageuse épaisse, on est incapable de dire de quelle direction provient la lumière, par contre on peut estimer la hauteur du soleil à la luminosité : le flux ne dépend pas de  $\varphi_0$ , mais il dépend de  $\mu_0$ ! C'est particulièrement flagrant quand il neige, comme aujourd'hui!!

## 5 Loi de Beer-Lambert et théorie de Kubelka-Munk

### 5.1 Introduction

Si on considère l'ETR sans sources :

$$\mu \frac{dI(\tau, \mu)}{d\tau} = -I(\tau, \mu) + \frac{\omega_0}{2} \int_{-1}^1 I(\tau, \mu') d\mu' \quad (33)$$

une approche de résolution brutale qui vient à l'esprit consiste à discrétiser l'intégrale sur  $\mu$  (méthode des rectangles, méthode de Gauss...). On voit que dans ce cas, on obtient un système différentiel couplé linéaire du premier ordre pour les flux  $I_i(\tau) \equiv I(\tau, \mu_i)$ , ce qui donne accès à tout un ensemble de méthodes de résolution. On parle de méthode à  $N$  flux, et c'est une des approches utilisées pour la résolution numérique de l'ETR. Cette approche a ses lettres de noblesse : c'est en suivant cette voie que Chandrasekhar a résolu l'équation ci dessus, moyennant un passage à la limite  $N \rightarrow \infty$ , l'introduction de fonctions spéciales, et une bonne dose de virtuosité calculatoire.

Dans ce contexte, il est intéressant de contempler les méthodes à 1 flux (Beer-Lambert) et 2 flux (Kubelka-Munk)<sup>17</sup>, qui permettent d'avoir une bonne compréhension de la physique de l'ETR. Notons aussi que le modèle de Kubelka et Munk reste très utilisé dans le monde de la peinture en raison de sa simplicité et de sa robustesse, en dépit de critiques très légitimes sur sa précision (Cf. Van de Hulst - 1980 [4]).

### 5.2 Loi de Beer-Lambert

La loi de Beer Lambert, observée empiriquement dans les solutions diluées absorbantes, mais non diffusantes, s'énonce "l'absorbance est proportionnelle à la concentration et à l'épaisseur de la solution traversée", soit en termes de chimistes  $A(\lambda) = \varepsilon(\lambda)CL$ , où  $\varepsilon(\lambda)$  s'appelle le coefficient d'absorption molaire, et caractérise l'absorbant. Pour un mélange idéal, on somme les absorbances des constituants. Nous allons "démontrer" cette loi.

Pour cela, adoptons un modèle simple de confettis, petits disques opaques de surface  $\sigma_a$  arrêtant la lumière de façon géométrique, et disposés aléatoirement dans le milieu, avec un nombre moyen de confettis par unité de volume  $\mathcal{C}$ .

Considérons une épaisseur  $dx$  suffisamment faible<sup>18</sup> de matériau absorbant. Celui-ci contient des confettis qui arrêtent la lumière. Le flux en entrée de cette

---

17. Une variante à 4 flux est parfois utilisée, mais elle présente plus d'inconvénients que d'avantages, et nous n'en parlerons pas.

18. i.e. ne comportant en moyenne pas de confettis "se faisant de l'ombre"

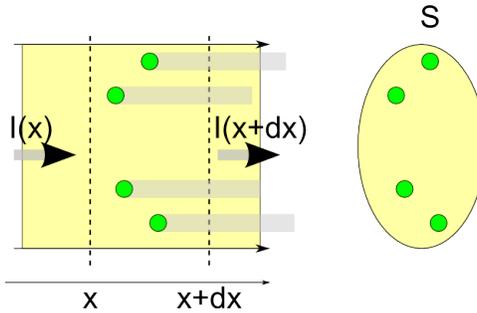


FIGURE 22 – Modèle d’absorption

tranche  $I(x)$  diminue en raison de cette absorption. La lumière rencontre en moyenne  $\mathcal{C}dxS$  particules, chacun de section efficace d’absorption  $\sigma_a$ . La surface opaque de la tranche vaut donc  $\sigma_a \mathcal{C}dxS$ . Si on calcule le taux de disparition de la lumière dans cette épaisseur  $dx$ , on a le bilan suivant :

$$\frac{\text{ce qui disparaît}}{\text{ce qui rentre}} = \frac{I(x) - I(x + dx)}{I(x)} = \frac{\text{surface opaque}}{\text{surface faisceau}} = \frac{\sigma_a \mathcal{C} dx S}{S}$$

ce qui se ré-écrit immédiatement

$$\frac{dI(x)}{dx} = -\sigma_a \mathcal{C} I(x)$$

On voit donc que le flux de lumière décroît de façon exponentielle en pénétrant dans le milieu,  $I(x) = I(0) \exp(-\sigma_a \mathcal{C} x)$ , et la transmittance est donnée par

$$T(\lambda) = \frac{I(L)}{I(0)} = \exp(-\sigma_a \mathcal{C} L)$$

ce qui est équivalent à la loi de Beer Lambert : en définissant en effet l’absorbance par  $A = -\log_{10}(T)$ , on retrouve bien la loi ci dessus, et on voit aussi que le coefficient d’absorption molaire constitue en fait une mesure de la section efficace de l’absorbeur, suivant la relation de conversion triviale (exercice : *le montrer*)

$$\varepsilon(\lambda) = \frac{1000}{\ln 10} \mathcal{N}_A \sigma_a(\lambda)$$

Remarquons que cette “démonstration “ de la loi de Beer Lambert n’en est bien entendu pas une. On a passé un certain nombre de difficultés sous le tapis. En particulier, on peut se demander comment un processus par nature discret se transforme en absorption continue du flux. La réponse est bien sûr cachée dans le fait de prendre un nombre fixe d’absorbeurs dans  $dx$ , et de traiter  $I(x)$  comme une variable continue. En réalité, le nombre de confettis rencontrés suit

une loi de Poisson, et le flux décroît de manière discrète, en moyenne de façon exponentielle, mais avec des fluctuations. C’est la même description que la désintégration radioactive, ou le “bruit de grenaille” en électronique.

Noter aussi que la quantité  $K = \sigma_a \mathcal{C}$ , inverse d’une longueur, s’appelle la “section efficace macroscopique” en physique nucléaire, et donne la profondeur de pénétration dans le milieu suivant  $l = 1/K$ .

Enfin, il est très facile de reprendre la démonstration avec plusieurs sortes de confettis, dont les populations sont supposées indépendantes (un rouge ne se colle pas systématiquement sous un vert !). Dans ce cas, il est facile d’établir que  $K = \sigma_1 \mathcal{C}_1 + \sigma_2 \mathcal{C}_2 = K_1 + K_2$ , c’est à dire que les absorbances se somment. Cette loi est à la base de la formulation des solutions colorées absorbantes non difusantes (verres colorés, sirops, teintures...), dits *mélanges soustractifs simples*. Elle donne la couleur d’une solution en fonction des concentrations de ses constituants (Cf. Geniet - 2012 [10]).

### 5.3 Modèle de Kubelka et Munk

#### 5.3.1 Présentation.

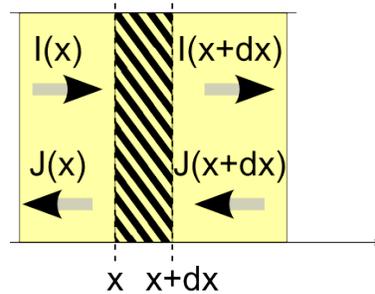


FIGURE 23 – Modèle à 2 flux

Le modèle de Kubelka et Munk, du à l’origine à Schüster (1905), est l’extension la plus simple de ce qui précède. L’idée est de décrire la diffusion par le couplage de deux flux diffus, l’un entrant et l’autre sortant. Ces flux décrivent en fait une situation très complexe, et on ne s’intéresse pas à leur répartition angulaire que l’on suppose en gros isotrope. Il est alors facile d’écrire un modèle qui couple les deux flux, suivant :

$$\begin{cases} \frac{dI(x)}{dx} &= -KI(x) + SJ(x) - SI(x) \\ -\frac{dJ(x)}{dx} &= -KJ(x) + SI(x) - SJ(x) \end{cases} \quad (34)$$

Quelques remarques nous aiderons à mieux comprendre le modèle :

- $K$  représente la section macroscopique d'absorption du matériau. Comme précédemment, il est raisonnable de penser qu'elle varie proportionnellement à la concentration.
- De même  $S$  représente en gros la section macroscopique de diffusion.
- Les termes en  $S$  décrivent le couplage des flux entrant et sortant par la diffusion. Si  $S = 0$  on retrouve Beer Lambert.
- Noter la parfaite symétrie  $x \leftrightarrow -x$ ,  $I \leftrightarrow J$  des équations, qui doit se retrouver dans les solutions, et traduit l'invariance droite-gauche.
- Noter aussi le signe  $-$  devant la 2<sup>ème</sup> équation : le sens de propagation est inverse.
- On peut facilement montrer que si on suppose que les deux distributions de flux vers la droite et vers la gauche sont héli-isotrope, c.a.d. constantes dans un demi-hémisphère, l'ETR (33) produit le système ci dessus (exercice : *le montrer*, et relier  $K$  et  $S$  à  $\kappa_a$  et  $\kappa_s$ , Cf. équation (25) ).

### 5.3.2 Résolution du modèle.

La solution générale du système différentiel linéaire d'ordre 1 à coefficients constants ci dessus est très classique. On cherche une base de 2 solutions exponentielles de la forme

$$\begin{pmatrix} I(x) \\ J(x) \end{pmatrix} = e^{\alpha x} \begin{pmatrix} I_0 \\ J_0 \end{pmatrix}$$

ce qui conduit à un système de valeurs propres (les valeurs de  $\alpha$ ) et de vecteurs propres. A un niveau élémentaire, on utilise la symétrie pour diagonaliser le système en prenant la somme et la différence des 2 lignes de (34). On trouve facilement la solution générale

$$\begin{cases} I(x) = A \left( 1 - \sqrt{\frac{K}{K+2S}} \right) e^{\alpha x} + B \left( 1 + \sqrt{\frac{K}{K+2S}} \right) e^{-\alpha x} \\ J(x) = A \left( 1 + \sqrt{\frac{K}{K+2S}} \right) e^{\alpha x} + B \left( 1 - \sqrt{\frac{K}{K+2S}} \right) e^{-\alpha x} \end{cases}$$

où les valeurs propres  $\pm\alpha$  sont données par  $\alpha = \sqrt{K(K+2S)}$ , et  $A$  et  $B$  sont des constantes arbitraires. On note encore à ce stade la symétrie  $x \leftrightarrow -x$  de la solution. La valeur propre  $\alpha$  donne la longueur d'atténuation dans le milieu suivant  $l = 1/\alpha$ . Si il n'y a pas de diffusion,  $S = 0$  et on retrouve le résultat de Beer Lambert. Le cas sans absorption est plus subtil, et pourra être traité en exercice. Dans ce cas, la solution varie de façon linéaire en  $x$  (exercice : *le montrer*. Voir aussi annale 03-2012 en appendice).

### 5.3.3 Conditions aux limites.

Le modèle ci dessus permet de faire plein de physique rigolote en choisissant des conditions aux limites adaptées aux problèmes que l'on veut décrire :

### Cas Opaque :

l'exemple le plus simple consiste à considérer une couche opaque, c'est à dire dont l'épaisseur  $L \gg 1/\alpha$ . Dans ce cas, le flux s'éteint avant d'arriver au fond, ce qui revient à supposer le milieu infini avec  $I(x), J(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0$ , c.a.d.  $A = 0$ .

On obtient alors immédiatement la réflectance

$$R_\infty = \frac{J(0)}{I(0)} = \frac{1 - \sqrt{\frac{K}{K+2S}}}{1 + \sqrt{\frac{K}{K+2S}}}$$

ce qui se ré-écrit encore  $\frac{K}{S} = \frac{(1-R_\infty)^2}{2R_\infty}$ . Cette dernière expression est la formule de Kubelka Munk opaque, parangon du savoir du coloriste moyen. Plusieurs remarques sont utiles :

- Il y a bien sûr une dépendance en longueur d'onde : la réflectance dépend de  $\lambda$  ( c'est la couleur de l'objet ! ) , car les sections  $K$  et  $S$  en dépendent. Les résultats présentés sont valables à chaque longueur d'onde indépendamment.
- On vérifie que la formule ci dessus donne bien les limites attendues  $R = 0$  pour  $S = 0$  (milieu absorbant, noir, décrit par Beer Lambert) et  $R = 1$  pour  $K = 0$  (matériau non absorbant, blanc idéal).
- On se souvient que  $K$  et  $S$  sont proportionnels à la concentration  $C$ . On voit alors immédiatement que la réflectance est indépendante de  $C$  ! Cela semble totalement idiot, sauf si on réalise que la couche est opaque, par hypothèse : on ne sait pas si il faut  $1 \mu\text{m}$  ou  $1 \text{ km}$  pour assurer cette opacité.
- En cas de mélange,  $K$  et  $S$  sont les sommes des sections macroscopiques des constituants :  $K = K_1 + K_2 + K_3$  et  $S = S_1 + S_2 + S_3$  . On obtient donc la réflectance d'un mélange, qui cette fois dépend du *rapport* des concentrations, de façon non-linéaire à travers la formule de Kubelka Munk. C'est donc une théorie de la couleur d'un mélange, à la base des méthodes de formulation des peintures opaques (Cf. Geniet - 2012 [10]).
- Dans ces méthodes opaques, l'échelle des sections macroscopiques est relative : on pose arbitrairement  $S_w = 1$  pour un matériau de référence, en général le blanc diffusant de la peinture. Toutes les valeurs de  $K$  et de  $S$  sont exprimées relativement à cette échelle (cela revient en fait à choisir une unité de longueur égale à  $1/S_w$  ) . Il n'y a ici en effet aucun moyen de déterminer une épaisseur ou une concentration absolue, puisque la couche est opaque. Nous allons voir comment on arrive à une détermination absolue de  $K$  et  $S$  avec les méthodes dites *translucides*.

### Cas Translucide :

Le cas type correspond à une couche de fond de réflectance  $R_F$  , surmontée d'une couche diffusante d'épaisseur  $L$  . La condition au bord en  $x = L$  s'écrit alors  $J(L)/I(L) = R_F$  , ce qui permet de déterminer la réflectance de l'ensemble  $R = J(0)/I(0)$  . Après des calculs simples, on trouve

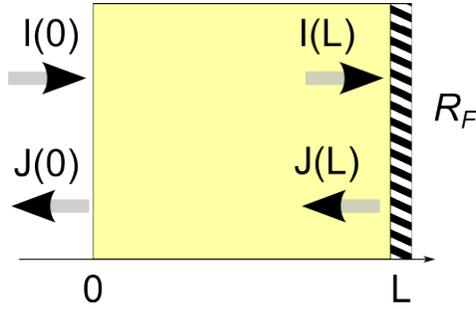


FIGURE 24 – Milieu translucide.

$$\frac{B}{A} = e^{2\alpha L} \frac{1 - R_F R_\infty}{R_F - R_\infty}$$

et

$$R = \frac{(R_F - R_\infty) + e^{2\alpha L} R_\infty (1 - R_F R_\infty)}{R_\infty (R_F - R_\infty) + e^{2\alpha L} (1 - R_F R_\infty)} \quad (35)$$

réflectance d'une couche d'épaisseur  $L$  sur un fond  $R_F$ . A titre d'exercices, on vérifiera que l'on retrouve les résultats attendus :

- pour une couche opaque  $L \rightarrow \infty$ .
- pour une couche d'épaisseur nulle  $L = 0$ .
- pour une couche parfaitement diffusante  $K = 0$ .
- pour une couche non diffusante  $S = 0$  (réfléchir au résultat obtenu, pour se persuader qu'il est correct).
- On pourra aussi contempler les résultats obtenus pour une couche de fond noire  $R_F = 0$  ou blanche  $R_F = 1$ .

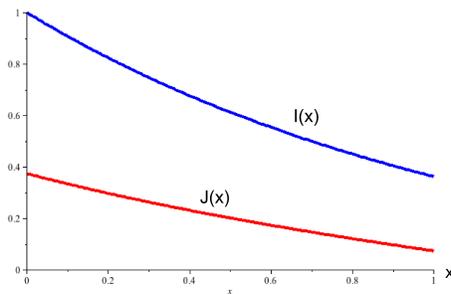


FIGURE 25 – profils de flux pour  $S = 0.9$ ,  $K = 0.4$ ,  $R_F = 0.2$ ,  $L = 1$

A partir de cette expression, on peut facilement tracer les profils des flux entrant et sortant dans le milieu, en fonction de la profondeur. Voici par exemple un

profil typique, obtenu pour les valeurs  $S = 0.9$ ,  $K = 0.4$ ,  $R_F = 0.2$ . On obtient  $R_\infty \simeq 0.4$ , et  $R \simeq 0.37$  pour une épaisseur  $L = 1$ .

L'expression (35) est à la base d'une foule de méthodes de *sondages*, par exemple

- en astrophysique : “je connais l’atmosphère de Vénus, diffusante et absorbante, je mesure  $R$  depuis la Terre, que vaut la réflectance du sol  $R_F$  ?”
- en océanographie, “je connais la nature du fond  $R_F$ , je mesure  $R$  depuis un satellite, quel renseignement en tirer sur l’état de la mer (turbidité  $S$ , absorption  $K$ ) ?”

Voyons une telle application dans le domaine des peintures : la méthode de Kubelka et Munk translucide :

Un peu d’algèbre permet de re-écrire (35) suivant (exercice : *le montrer*)

$$R = \frac{R_F(\psi - x) + 1 - R_F}{(\psi + x) + 1 - R_F}$$

avec par définition  $x = K/S$  et  $\psi = \sqrt{x^2 + 2x} \coth(\sqrt{x^2 + 2x} SL)$ .

Si on mesure les 2 réflectances ( $R_1, R_2$ ) de la couche sur 2 fonds différents ( $R_{F1}, R_{F2}$ ), on obtient un système linéaire en  $\psi$  et  $x$ , dont la résolution donne finalement  $K$  et  $S$  de façon explicite. Cela explique la popularité de la méthode dans le domaine des peintures : elle donne toujours une solution. Dans un contexte plus ambitieux, elle permet de disposer d’une première approximation aux sections efficaces, déterminées ensuite par des modèles plus sophistiqués basés sur l’ETR.

Exercice : montrer que la transmittance d’une couche translucide d’épaisseur  $L$  en l’absence de fond vaut :

$$T = \frac{\sqrt{\psi^2 - (x^2 + 2x)}}{\psi + x + 1}$$

### 5.3.4 Correction de Saunderson.

Nous abordons ici un sujet subtil, qui sera envisagé sous plusieurs aspects dans ce cours : la correction de surface de Giovanelli-Saunderson. Les calculs ci dessus sont valables en l’absence de discontinuité de surface, comme c’est par exemple le cas pour une atmosphère, un brouillard... Si le milieu est dense, il se produit une réflexion de Fresnel à l’interface Cf. section (3.5). La réflectance mesurée  $R_{ext}$  est donc différente de celle que nous avons calculée juste à l’intérieur du milieu,  $R_{int}$ . La correction de Saunderson relie ces deux réflectances<sup>19</sup>. Historiquement, cette correction a été introduite afin de mettre en accord les calculs de formulation de peinture par Kubelka et Munk opaque avec les résultats (J.L. Saunderson - 1942 [6]). Voyons comment l’établir simplement :

<sup>19</sup>. La correction de Giovanelli fait de même dans le contexte de l’ETR.

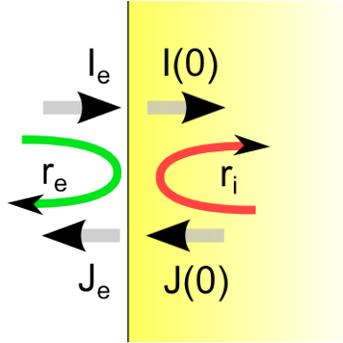


FIGURE 26 – Relations entre flux à l'interface

En examinant la figure ci contre, on voit immédiatement les relations entre les différents flux à l'interface :

$$\begin{cases} J_e = (1 - r_i) J(0) + r_e I_e \\ I(0) = (1 - r_e) I_e + r_i J(0) \end{cases} \quad (36)$$

Avant de poursuivre, persuadons nous que l'effet est suffisamment grand pour mériter d'être calculé : à priori pour un milieu d'indice  $n = 1.5$ , le coefficient de réflexion en incidence normale vaut  $r_{\perp} = \left(\frac{1-n}{1+n}\right)^2 \simeq 0.04$ . Il semble donc que l'effet soit faible, ce que sait bien tout opticien : la transmission des  $N$  interfaces est  $0.96^N$ . La situation change pour un flux diffus sortant comportant des grands angles d'incidence : le coefficient de réflexion de Fresnel augmente et atteint 1 pour le flux sortant, au delà de l'angle critique  $\theta_{cr} = \arcsin(1/n) \simeq 42^\circ$ . Il est facile de calculer le coefficient de réflexion moyen à l'aide des outils présentés dans ce cours : on a, d'après (6) et les relations vues à la partie (3.3)

$$\bar{r} = \frac{J_+}{J_-} = \frac{\int I^{sortant} \mu d\mu d\varphi}{\int I^{entrant} \mu d\mu d\varphi}$$

en utilisant alors la relation reliant les radiances entrantes et sortantes, équation (17), et l'expression de de la BRDF de Fresnel (21), on obtient finalement pour un flux incident isotrope le résultat quasi évident (exercice : *faire cette suite de calculs*)

$$\bar{r} = \int_0^1 r_F(\mu) 2\mu d\mu$$

Dans le cas d'un milieu d'indice  $n = 1.5$ , le calcul donne  $r_i \simeq 0.59$ , c'est à dire que pour un flux sortant isotrope, le coefficient de réflexion moyen de l'interface vaut 60% ! Pour le coefficient entrant, dans le cas d'un flux diffus, on

aura  $1 - r_e = n^2(1 - r_i)$ , soit  $r_e \simeq 0.09^{20}$ . Pour un flux collimaté incident, on prendra par contre  $r_e = r_{\perp} = 0.04$ . Dans la pratique, on détermine  $r_{\perp}$  expérimentalement : c'est la réflectance minimale mesurée en incidence normale, obtenue pour un objet noir totalement absorbant. On calcule alors  $n$  puis  $r_i$ , ce qui permet d'appliquer la correction de Saunderson en pratique.

La résolution du système (36) permet de passer des réflectances internes  $R_{int} = J(0)/I(0)$  aux réflectances externes mesurées  $R_{ext} = J_e/I_e$  suivant :

$$R_{ext} = r_e + \frac{(1 - r_i)(1 - r_e)R_{int}}{1 - r_i R_{int}}$$

dite correction de Saunderson. On voit qu'elle a une interprétation physique agréable : la réflexion externe est due à la réflexion spéculaire  $r_e$  à laquelle se superposent les réflexions multiples entre la couche et l'interface, Cf. figure (27) ci-dessous.

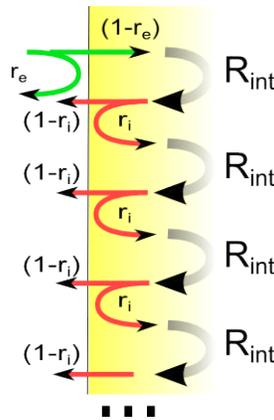


FIGURE 27 – Correction de Saunderson

## 5.4 Conclusion

Les quelques calculs esquissés ici peuvent évidemment être adaptés à un grand nombre de situations variées de façon très simple, ce qui en fait le couteau Suisse du transfert radiatif. Il est cependant clair qu'il ne faut par forcément en attendre trop, surtout si on souhaite s'intéresser à la géométrie angulaire des flux, ce que nous allons faire maintenant. L'autre intérêt de cette présentation des méthodes élémentaires est qu'elle permettent d'obtenir une bonne intuition des phénomènes en jeu, sans être noyé dans la complexité des équations, ce qui est toujours appréciable. Cela dit, il est clair que les astrophysiciens n'utilisent plus

<sup>20</sup>. cette relation provient du principe du retour inverse, et de la concentration des flux à l'interface, Cf. §(3.5)

cette approche depuis belle lurette. Voyons donc maintenant quelques outils de résolution propres au transfert radiatif.

## 6 Méthodes de résolution de l'ETR.

Il existe un très grand nombre d'approches pour résoudre l'ETR dans des contextes très variés. Les méthodes numériques sont en particuliers très utilisées de nos jours, car elles permettent de résoudre des situations très complexes de diffusion non-isotrope dans des milieux non homogènes. Nous présenterons ici des méthodes analytiques, dont l'intérêt est de fournir une bonne compréhension de la nature des solutions attendues, ainsi que des benchmarks pour les méthodes numériques. Je ne prétends pas non plus donner toutes les méthodes de résolution, mais seulement celles qui me sont familières. Enfin, dans cette introduction au sujet, je me limiterai à l'équation du transfert simple avec symétrie azimutale, et une diffusion isotrope, équation (33) avec ou sans terme de source. Pour plus de méthodes, une référence s'impose : Van de Hulst - 1980 [4].

### 6.1 Une première solution non triviale.

Appliquons à l'équation (33) une technique standard de résolution des équations linéaires : la méthode de séparation des variables. On cherche donc une solution du type  $I(\tau, \mu) = h(\tau)f(\mu)$ . En reportant dans l'équation, on arrive à la forme séparée

$$\alpha = -\frac{h'(\tau)}{h(\tau)} = \frac{1}{\mu} - \frac{\omega_0}{2\mu f(\mu)} \int_{-1}^1 f(\mu') d\mu'$$

On voit donc que c'est une solution variant exponentiellement avec la profondeur  $h(\tau) = \exp(-\alpha\tau)$ . La dépendance angulaire est facile à déterminer, car l'équation intégrale pour  $f$  est très simple lorsque la diffusion est isotrope : on a

$$C = \frac{\omega_0}{2} \int_{-1}^1 f(\mu) d\mu \quad \text{et} \quad f(\mu) = \frac{C}{1 - \alpha\mu}$$

$\alpha$  doit donc vérifier l'équation caractéristique

$$\frac{2}{\omega_0} = \int_{-1}^1 \frac{d\mu}{1 - \alpha\mu} \quad \text{soit} \quad \ln\left(\frac{1 + \alpha}{1 - \alpha}\right) = \frac{2\alpha}{\omega_0}$$

Pour  $0 < \omega_0 < 1$  il existe une solution réelle unique  $0 < \alpha < 1$  et sa symétrique  $-\alpha$  que nous sommes contents de retrouver (il n'y a pas de direction privilégiée haut-bas). On peut aussi montrer que cette solution a la plus petite partie réelle, et correspond au plus faible amortissement dans le milieu. C'est le *mode fondamental* de transfert, qui est le seul qui subsiste en profondeur dans le milieu, d'où son intérêt. On verra plus bas qu'il correspond à une diffusion simple<sup>21</sup>. La solution ainsi obtenue s'écrit donc finalement

$$I_{\downarrow}(\tau, \mu) = C \frac{\exp(-\alpha\tau)}{1 - \alpha\mu}$$

---

21. les autres modes, amortis plus rapidement, présentent une distribution angulaire plus compliquée, et on peut les obtenir systématiquement par une analyse en ondes partielles, ce dont nous ne parlerons pas ici.

On reconnaît un profil angulaire elliptique (rappel :  $\mu = \cos(\theta)$ ), d'excentricité  $\alpha$ , dont le grand lobe est orienté vers le bas, ce qui correspond à une solution descendant dans le milieu en s'amortissant de façon exponentielle. La solution montante est obtenue par le changement  $\alpha \leftrightarrow -\alpha$ .

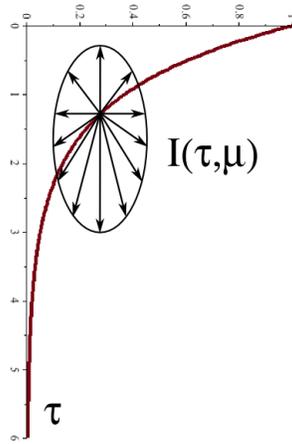


FIGURE 28 – Profil de diffusion

Exercice : traiter le cas sans absorption,  $\omega_0 = 1$ , et montrer que dans ce cas la solution varie de façon linéaire avec  $\tau$  (Cf. annexe sujet annale mars 2012).

Montrons maintenant que la solution ainsi trouvée est solution de l'équation de la diffusion, et déterminons le coefficient de diffusion  $D$ . On définit les *moments* de la distribution  $I(\mu)$

$$\begin{aligned}
 E(\tau) &= \int_{-1}^1 I(\tau, \mu) d\mu \\
 J(\tau) &= \int_{-1}^1 I(\tau, \mu) 2\mu d\mu \\
 K(\tau) &= \int_{-1}^1 I(\tau, \mu) \mu^2 d\mu \\
 &\dots
 \end{aligned}$$

correspondant respectivement à la densité d'énergie rayonnante  $cu$  et au courant, les moments d'ordre supérieur n'ayant pas de nom spécial. En prenant les moments de l'ETR  $\int \mu^n d\mu \rightarrow$  ETR on obtient une chaîne d'équations différentielles couplées dont les premiers termes s'écrivent

$$\begin{aligned} \frac{dJ}{d\tau} &= - (1 - \omega_0)E(\tau) \\ \frac{dK}{d\tau} &= -J(\tau) \\ &\dots \end{aligned}$$

Dans le cas général, cette chaîne infinie équivaut à l'ETR. La première équation correspond clairement à une équation de conservation : l'absorption est responsable de la disparition du flux. Pour la solution vue plus haut,  $K$  et  $E$  sont proportionnels, et la seconde équation s'écrit

$$J(\tau) = -D \frac{dE(\tau)}{d\tau}$$

On reconnaît la loi de Fick, avec un coefficient de diffusion  $D = \frac{1-\omega_0}{\alpha^2}$ . Pour un milieu non absorbant  $\omega_0 \rightarrow 1$ , et on trouve alors  $D = 1/3$  ce qui constitue l'approximation de Eddington. (exercice : *montrer ces résultats*). Nous verrons plus bas la solution du *problème de Milne*, qui permet de recoller cette solution à une condition au bord, et déterminer le flux radiatif sortant.

A titre de complément, regarder comment ces calculs sont modifiés pour une diffusion non isotrope, avec une fonction de phase  $p(\mu', \mu)$ .

## 6.2 Equation intégrale du transfert.

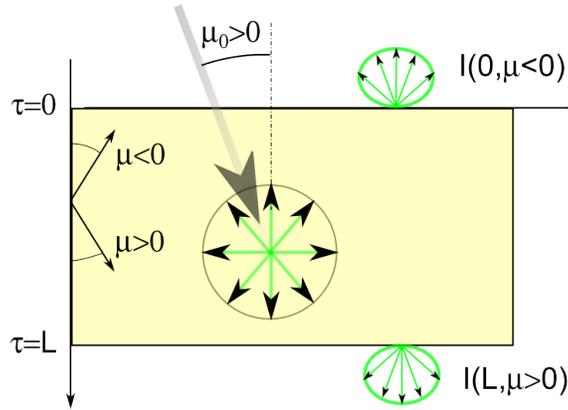


FIGURE 29 – Géométrie “slab”

Considérons une couche d'épaisseur  $\tau = L$  soumise à un flux incident collimaté dans la direction  $\mu_0$ . La situation est décrite par l'équation (32), avec les conditions au bord  $I(\tau = 0, \mu > 0) = 0$  et  $I(\tau = L, \mu < 0) = 0$  (pas de flux diffus entrant, ni par le haut ni par le bas).

Dans le cas des EDP, une technique souvent utilisée consiste à transformer une équation différentielle en une équation intégrale incorporant les conditions aux limites. Cette recette s'applique ici aussi, et elle ouvre la voie à des méthodes d'approximation intéressantes. L'équation peut s'écrire formellement

$$\mu \frac{dI(\tau, \mu)}{d\tau} = -I(\tau, \mu) + S(\tau, \mu) \quad (37)$$

avec un *terme de source*

$$S(\tau, \mu) = \frac{\omega_0}{2} \int_{-1}^1 I(\tau, \mu') d\mu' + \frac{F}{4\pi} \omega_0 e^{-\tau/\mu_0} \quad (38)$$

Remarquer que nous nous sommes placés ici dans le cas simple de la diffusion isotrope avec une symétrie azimutale, mais les calculs s'étendent au cas général sans problème. En utilisant la "méthode de variation de la constante", la solution de (37) s'écrit  $I(\tau, \mu) = J(\tau, \mu) \exp(-\tau/\mu)$ , où  $J$  vérifie

$$\frac{dJ(\tau, \mu)}{d\tau} = \frac{e^{\tau/\mu}}{\mu} S(\tau, \mu)$$

On peut donc intégrer cette équation, en tenant compte des conditions aux limites au bord de la couche. On obtient finalement pour les flux descendant et montant :

$$\begin{aligned} I_{\downarrow}(\tau, \mu) &= \int_0^{\tau} \frac{e^{-(\tau-\tau')/\mu}}{\mu} S(\tau', \mu) d\tau' & \mu > 0 \\ I_{\uparrow}(\tau, \mu) &= - \int_{\tau}^L \frac{e^{-(\tau-\tau')/\mu}}{\mu} S(\tau', \mu) d\tau' & \mu < 0 \end{aligned} \quad (39)$$

Qui permettent formellement de calculer les flux sortant de la couche. Bien entendu,  $S(\tau, \mu)$  dépend toujours de  $I(\tau, \mu)$  et l'équation n'est toujours pas résolue, mais cette forme permet d'obtenir facilement un développement du type série de Born.

### 6.3 Equation intégrale de Schwartzschild - Milne.

L'équation de Schwartzschild - Milne, d'un intérêt plutôt historique, est une conséquence directe de cette approche dans le cas où la diffusion est isotrope  $p(\mu, \mu') = \omega_0$ . Dans ce cas, le terme source  $S(\tau)$  est indépendant de  $\mu$  (la rediffusion ne privilégie aucune direction). En reportant les solutions formelles (39) dans la définition du terme de source (38), et en permutant les intégrales sur  $\tau$  et sur  $\mu$ , on arrive à une équation de type Fredholm 2<sup>ème</sup> espèce :

$$S(\tau) = \frac{F}{4\pi} \omega_0 e^{-\tau/\mu_0} + \frac{\omega_0}{2} \int_0^L K(\tau - \tau') S(\tau') d\tau'$$

avec le noyau donné par une exponentielle intégrale

$$K(\tau - \tau') = E_1(|\tau - \tau'|) = \int_0^1 \frac{e^{-|\tau - \tau'|/\mu}}{\mu} d\mu$$

(Exercice : *le montrer*).

En résolvant numériquement cette équation, on peut alors retrouver les radiances par (39). Le noyau présente une singularité logarithmique en 0, mais ce n'est pas trop méchant à traiter, et la théorie des équations de Fredholm est bien connue (Cf. par exemple Hilbert & Courant - 1953 [11]). Cependant, je ne connais pas de moyen d'étendre cette solution au cas non isotrope contrairement à la suivante.

#### 6.4 Développement en série de Born.

La résolution du système d'équations (38,39) peut se faire par un développement de la solution en puissance de  $\omega_0$ . A l'ordre 1 le terme source est juste donné par le terme collimaté  $S(\tau) = \frac{F}{4\pi} \omega_0 e^{-\tau/\mu_0}$ , et on peut calculer les flux sortant :

$$\begin{aligned} I_{\downarrow}(L, \mu) &= \frac{F}{4\pi} \omega_0 e^{-L/\mu} \int_0^L \frac{e^{\tau'(1/\mu - 1/\mu_0)}}{\mu} d\tau' \\ &= \frac{F}{4\pi} \omega_0 \frac{\mu_0}{\mu_0 - \mu} \left[ e^{-L/\mu_0} - e^{-L/\mu} \right] \\ I_{\uparrow}(0, -\mu) &= \frac{F}{4\pi} \omega_0 \int_0^L \frac{e^{-\tau'(1/\mu + 1/\mu_0)}}{\mu} d\tau' \\ &= \frac{F}{4\pi} \omega_0 \frac{\mu_0}{\mu_0 + \mu} \left[ 1 - e^{-L/\mu_0} e^{-L/\mu} \right] \end{aligned}$$

Comme nous sommes exactement dans la situation envisagée à la section (4.3), on peut utiliser les relations (28) et (31) pour calculer la BRDF et la BTDF diffuse, ce qui donne finalement :

$$\begin{aligned} T(\mu, \mu_0) &= \frac{\omega_0}{4(\mu_0 - \mu)} \left[ e^{-L/\mu_0} - e^{-L/\mu} \right] \\ R(\mu, \mu_0) &= \frac{\omega_0}{4(\mu_0 + \mu)} \left[ 1 - e^{-L/\mu_0} e^{-L/\mu} \right] \end{aligned}$$

Ces expressions ne sont pas du tout triviales, et permettent d'obtenir la BRDF pour des milieux dans lesquels la diffusion est faible. La condition pratique pour les appliquer est d'avoir une tranche d'épaisseur optique fine et/ou peu diffusante, et le critère quantitatif est  $L \omega_0 \lesssim 0.3$ . Ce critère n'est pas souvent rempli, mais la méthode dite "Adding-Doubling" permet d'atteindre des épaisseurs optiques plus importantes par empilement de couches. Nous verrons cette méthode un peu plus loin.

Un autre point intéressant dans ces expressions est que la forme de la solution est assez typique, et se retrouve dans la solution exacte de Chandrasekhar, ou d'autres schémas d'approximation plus sophistiqués. La solution de Chandrasekhar s'écrit en effet sous la forme factorisée :

$$\begin{aligned} T(\mu, \mu_0) &= \frac{\omega_0}{4(\mu_0 - \mu)} [X(\mu)Y(\mu_0) - X(\mu_0)Y(\mu)] \\ R(\mu, \mu_0) &= \frac{\omega_0}{4(\mu_0 + \mu)} [X(\mu)X(\mu_0) - Y(\mu_0)Y(\mu)] \end{aligned}$$

où les fonctions spéciales  $X$  et  $Y$  (qui dépendent de  $\omega_0$  et de  $L$ ) vérifient des équations intégrales non linéaires très simples à résoudre de façon numérique.

Enfin remarquons que la BRDF et la BTDF ainsi obtenues sont symétriques par échange ( $\mu \leftrightarrow \mu_0$ ), c.a.d. vérifient un principe généralisé de retour inverse de la lumière. On ne peut pas invoquer pour cela la simple réversibilité de la propagation en optique, car il est clair que la diffusion est un processus non symétrique par renversement du temps ! Je n'ai jamais bien compris les arguments qui permettent de généraliser le principe du retour inverse avec des lois statistiques, mais le fait est que le résultat est symétrique ce qui est très utile en pratique, et fonctionne aussi raisonnablement du point de vue expérimental. C'est ce qui justifie finalement l'équivalence des géométries de mesure  $0^\circ/45^\circ$  et  $45^\circ/0^\circ$  sur les colorimètres, et  $D/8^\circ$  et  $8^\circ/D$  sur les spectromètres à sphère.

Voyons maintenant la solution exacte de Chandrasekhar dans le cas d'une tranche opaque ( $L \rightarrow \infty$ ), pour laquelle  $Y \rightarrow 0$ .

## 6.5 Solution de Chandrasekhar.

Nous allons dériver cette solution par la méthode d'Ambartsumian, beaucoup plus simple que la version originale. De plus nous considérons ici le cas le plus "facile" d'un milieu opaque. Dans ce cas, la BRDF à la surface est la même que si on "écrète" la couche à une profondeur  $\tau$ .

En considérant un flux incident  $F\delta(\mu - \mu_0)$ , on peut écrire à la profondeur  $\tau$  et pour  $\mu > 0$  l'équation d'Ambartsumian :

$$I(\tau, -\mu) = \frac{1}{\pi} R(\mu, \mu_0) \mu_0 F e^{-\tau/\mu_0} + \int_0^1 R(\mu, \mu') I(\tau, \mu') 2\mu' d\mu'$$

qui exprime que le flux remontant à la profondeur  $\tau$  provient de la réflexion diffuse du flux collimaté atténué et du flux diffus descendants par la couche de profondeur supérieure à  $\tau$  (Cf. figure (30)). Cette équation est une conséquence directe de nos définitions du flux diffus Eq. (29) et de la BRDF Eq.(17).

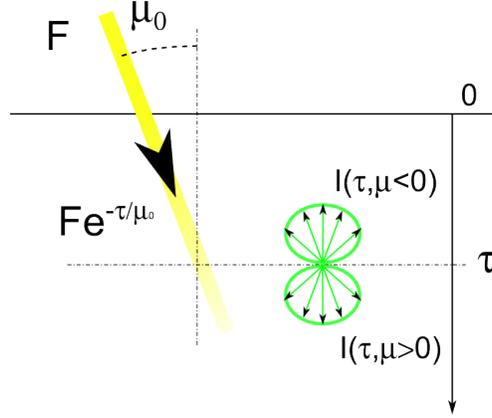


FIGURE 30 – Réflectance à une profondeur  $\tau$

On écrit alors cette équation sous une forme infinitésimale, en dérivant par rapport à  $\tau$  en  $\tau = 0$ . On obtient

$$\frac{dI(\tau = 0, -\mu)}{d\tau} = -\frac{1}{\pi}R(\mu, \mu_0)F + \int_0^1 R(\mu, \mu') \frac{dI(\tau = 0, \mu')}{d\tau} 2\mu' d\mu'$$

On va maintenant utiliser l'ETR (32) écrite en  $\tau = 0$ , en séparant les cas  $\mu > 0$  et  $\mu < 0$ , et en remarquant que  $I(\tau = 0, \mu > 0) = 0$  et  $I(\tau = 0, \mu < 0) = \frac{1}{\pi}R(\mu, \mu_0)\mu_0 F$  :

$$\begin{aligned} \mu \frac{dI(\tau = 0, \mu > 0)}{d\tau} &= -\frac{1}{\pi}R(\mu, \mu_0)\mu_0 F + \frac{\omega_0}{2\pi}F \int_0^1 R(\mu', \mu_0) d\mu' + \frac{F}{4\pi}\omega_0 \\ \mu \frac{dI(\tau = 0, -\mu < 0)}{d\tau} &= -\frac{\omega_0}{2\pi}F \int_0^1 R(\mu', \mu_0) d\mu' - \frac{F}{4\pi}\omega_0 \end{aligned}$$

En reportant ces dérivées dans l'équation ci dessus, on obtient après quelques réarrangements

$$\begin{aligned} (\mu + \mu_0)R(\mu, \mu_0) &= \frac{\omega_0}{4} \left[ 1 + 2 \left( \mu_0 \int_0^1 R(\mu', \mu_0) d\mu' + \mu \int_0^1 R(\mu, \mu'') d\mu'' \right) \right. \\ &\quad \left. + 4\mu_0\mu \int_0^1 R(\mu', \mu_0) d\mu' \int_0^1 R(\mu, \mu'') d\mu'' \right] \end{aligned}$$

que l'on peut finalement réécrire sous la forme

$$R(\mu, \mu_0) = \frac{\omega_0}{4(\mu + \mu_0)} H(\mu)H(\mu_0) \quad (40)$$

où la fonction  $H$  vérifie l'équation intégrale non linéaire :

$$\frac{1}{H(\mu)} = 1 - \omega_0 \mu \int_0^1 \frac{H(\mu')}{2(\mu + \mu')} d\mu'$$

En pratique cette équation est très simple à résoudre en quelques itérations. La fonction  $H$  est la plus simple d'une vaste famille qui a beaucoup été étudiée après leur découverte, et est très bien connue. A titre d'exemple, voici la réflectance obtenue pour un angle d'incidence de  $45^\circ$ , avec une valeur de  $\omega_0 = 0.99$  (milieu très diffusant). On voit bien que l'hypothèse de réflexion Lambertienne n'est pas valable : la réflexion diffuse dépend de l'angle !

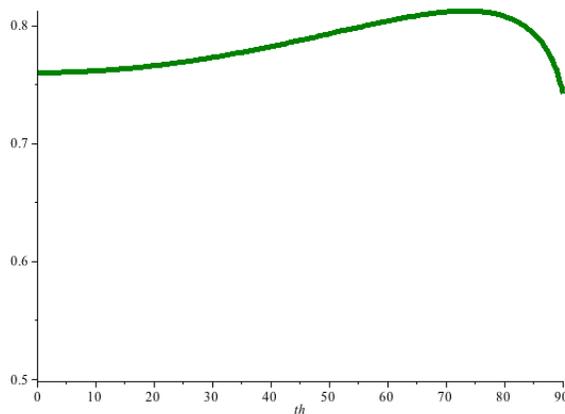


FIGURE 31 – Réflexion diffuse pour un angle d'incidence de  $45^\circ$  et un albedo  $\omega_0 = 0.99$

Le résultat ci dessus est très impressionnant : la factorisation en fonction  $H$  n'est pas évidente du tout, et la simplicité du résultat est remarquable. De plus,

- On peut étendre le résultat aux couches d'épaisseur finies, ce qui donne une structure des solutions en fonctions  $X$  et  $Y$  vues plus haut.
- On peut étendre le résultat à une diffusion non isotrope, avec une fonction de phase en  $\cos \theta$ , puis en  $\cos^2 \theta$  (diffusion Rayleigh).
- On peut traiter la diffusion de la lumière polarisée !

Tous ces résultats sont présentés dans l'ouvrage de Chandrasekhar, et constituent un bijou de la Physique Mathématique du XX<sup>ème</sup> siècle. L'intérêt de la chose est de nos jours plutôt historique, mais on ne peut que saluer le *tour de force*...

## 6.6 Solution du problème de Milne.

En cerise sur le gateau, voici la solution du problème de Milne, qui donne en substance la réponse au problème de l'obscurcissement du disque solaire. Rappelons qu'il s'agit d'obtenir la luminance d'une surface dans laquelle règne en

profondeur un flux de type diffusion montante (Cf. § 6.1). La radiance globale s'écrit donc

$$\begin{aligned} I(\tau, \mu) &= \delta I(\tau, \mu) + C \frac{\exp(\alpha\tau)}{1 + \alpha\mu} \\ I(\tau = 0, \mu > 0) &= 0 \end{aligned}$$

la deuxième équation traduisant l'absence de flux diffus entrant dans le milieu. On veut calculer le flux sortant  $I(\tau = 0, \mu < 0)$ . La fonction  $\delta I$  est, comme  $I$  et comme la solution diffusive, une solution de l'ETR (linéarité). Elle vérifie par définition les conditions aux limites :

$$\begin{aligned} \delta I(\tau = 0, \mu > 0) &= -C \frac{1}{1 + \alpha\mu} \\ \delta I(\tau \rightarrow \infty, \mu) &= 0 \end{aligned}$$

c'est à dire une situation de couche opaque, avec un flux incident donné. On sait donc résoudre ce problème de réflexion classique au moyen de la BRDF du milieu que l'on a calculé au paragraphe précédent :

$$\delta I(\tau = 0, \mu < 0) = \int_0^1 R(-\mu, \mu') \delta I(\tau = 0, \mu') 2\mu' d\mu'$$

ce qui donne

$$I(\tau = 0, \mu < 0) = C \left\{ \frac{1}{1 + \alpha\mu} - \int_0^1 \frac{R(-\mu, \mu')}{1 + \alpha\mu'} 2\mu' d\mu' \right\}$$

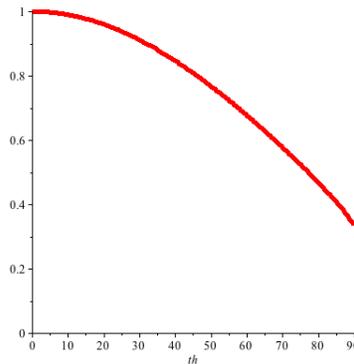


FIGURE 32 – Obscurcissement du disque solaire.

En utilisant enfin l'expression de la solution (40) et l'équation intégrale pour  $H$ , on arrive finalement à

$$I(\tau = 0, -\mu) = \frac{C}{H(1/\alpha)} \frac{H(\mu)}{1 - \alpha\mu}$$

Sur la figure ci dessus, on a tracé la radiance en fonction de l'angle de sortie, pour une valeur  $\omega_0 = 0.99$  ,  $\alpha \simeq 0.172511$  . On voit bien l'effet d'obscurcissement, et la résolution du paradoxe apparent : “comment un diffuseur isotrope peut il avoir un comportement non Lambertien ?”. La réponse est en fait assez simple : c'est la solution diffusive profonde qui introduit l'anisotropie dans la solution de l'ETR.

## 6.7 Méthode de “Adding-Doubling”.

La méthode de “Adding-Doubling” a été introduite pour étendre les résultats obtenus pour une couche mince (Cf. §(6.4) ci dessus) au cas d'une couche plus épaisse. Le principe est simple : on empile les couches, d'où le nom de la méthode. On va voir qu'il s'agit en fait de la méthode classique de la “matrice de transfert”, conséquence directe de la linéarité de l'ETR. Cette méthode présente une autre utilité : elle permet de superposer des couches de nature différentes. Nous en verrons quelques exemples dans les sections suivantes : couche diffusante sur un fond Lambertien, et couche diffusante surmontée d'une interface de Fresnel (discontinuité d'indice).

### 6.7.1 Dérivation de la méthode

Considérons la situation schématisée sur le schéma suivant :

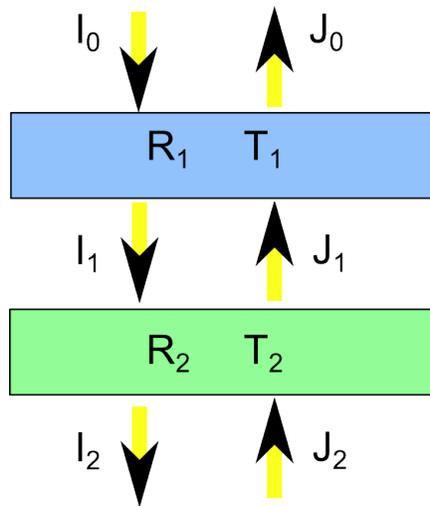


FIGURE 33 – Adding Doubling

On peut écrire les relations suivantes, qui expriment la linéarité entre les flux :

$$\begin{cases} I_1 = T_1^+ I_0 + R_1^- J_1 \\ J_0 = T_1^- J_1 + R_1^+ I_0 \\ I_2 = T_2^+ I_1 + R_2^- J_2 \\ J_1 = T_2^- J_2 + R_2^+ I_1 \end{cases} \quad (41)$$

Quelques remarques sur ces équations :

- La notation compacte des opérateurs est utilisée :  $RI \equiv \int_0^1 R(\mu, \mu') I(\mu') 2\mu' d\mu'$ . L'algèbre qui en résulte est la même que celle des matrices, et en particulier, les produits ne commutent pas.
- On a explicitement supposé que les couches n'ont pas le même comportement dans un sens et dans l'autre. C'est le cas pour une interface de Fresnel par exemple, dont la forme opératorielle n'est pas symétrique.
- On a déjà vu des relations de ce style en établissant la correction de Saunderson. C'est la même idée, en fait.

Les relations d'adding-doubling sont obtenues en éliminant les flux intermédiaires  $I_1$  et  $J_1$  du système précédent. Par exemple, on multiplie la ligne 4 à gauche par  $R_1^-$  et on somme à la 1, ce qui élimine  $J_1$ , puis on multiplie la 1 à gauche par  $R_2^+$  et on ajoute à la 4 ce qui élimine  $I_1$ . On reporte alors  $I_1$  et  $J_1$  dans les 2 et 3, ce qui donne :

$$\begin{cases} I_2 = T_2^+ (1 - R_1^- R_2^+)^{-1} T_1^+ I_0 + (R_2^- + T_2^+ (1 - R_1^- R_2^+)^{-1} R_1^- T_2^-) J_2 \\ J_0 = T_1^- (1 - R_2^+ R_1^-)^{-1} T_2^- J_2 + (R_1^+ + T_1^- (1 - R_2^+ R_1^-)^{-1} R_2^+ T_1^+) I_0 \end{cases}$$

et par identification, on lit les réflectances et transmittance de la couche composée :

$$\begin{cases} T^+ = T_2^+ (1 - R_1^- R_2^+)^{-1} T_1^+ \\ T^- = T_1^- (1 - R_2^+ R_1^-)^{-1} T_2^- \\ R^+ = R_1^+ + T_1^- (1 - R_2^+ R_1^-)^{-1} R_2^+ T_1^+ \\ R^- = R_2^- + T_2^+ (1 - R_1^- R_2^+)^{-1} R_1^- T_2^- \end{cases}$$

qui forment les équations de adding-doubling, ou de la matrice de transfert composée. Notez la symétrie ‘‘haut-bas’’ ( $1 \leftrightarrow 2$ ) et  $(+ \leftrightarrow -)$  obtenue en mettant la tête en bas. On peut aussi interpréter ces relations de manière analogue à celle que nous avons vue à la figure (27), en tenant compte des réflexions multiples entre les couches (exercice : *le faire*, en se rappelant que la physique se lit de droite à gauche dans les relations opératorielles).

Voyons maintenant des exemples d'applications de ces équations.

## 6.7.2 Applications

**BRDF d'une couche diffusante sur un fond Lambertien** Ce premier exemple est très utile, et correspond au cas que nous avons envisagé dans le paragraphe Kubelka Munk translucide : une couche diffusante d'épaisseur optique  $L$  sur un fond Lambertien. Dans ce cas la couche (1) est décrite par une BRDF  $R_1(\mu, \mu_0)$  et une BTDF :  $e^{-L/\mu_0} \frac{\delta(\mu-\mu_0)}{2\mu_0} + T_1(\mu, \mu_0)$ , ou on a explicitement séparé la partie colimatée. La couche (2) est décrite par une BRDF constante  $R_F$  (une matrice remplie de  $R_F$ ). Les intégrales sont très faciles à calculer, puisque  $R_F$  ne dépend pas des angles d'intégrations, et on trouve, après avoir sommé la série :

$$R(\mu, \mu_0) = R_1(\mu, \mu_0) + (e^{-L/\mu} + t_1(\mu)) \frac{R_F}{1 - r_1 R_F} (e^{-L/\mu_0} + t_1(\mu_0)) \quad (42)$$

où les transmittances  $\mu$ -diffus et les réflectances diffus-diffus sont données par les intégrales :

$$t_1(\mu) = \int_0^1 T_1(\mu, \mu') 2\mu' d\mu'$$

$$r_1 = \int_0^1 \int_0^1 R_1(\mu, \mu') 2\mu d\mu 2\mu' d\mu'$$

Cette formule s'explique bien par des considérations physiques : la réflectance totale est celle de la couche (1) plus celle de la couche du fond à travers la couche (1), avec des réflexions multiples (le dénominateur), les transmissions collimatées et diffuses, et le fait que la couche du fond redistribue tous les flux reçus de façon Lambertienne, quelle que soit leur origine (exercice : *faire ce calcul, et son interprétation*).

Les expressions ci dessus peuvent être appliquées comme les expressions correspondantes de Kubelka-Munk (35) pour résoudre des problèmes de sondage : "quelle est le sol sous cette atmosphère?" ou bien "quelle est l'atmosphère sur ce sol?" ce que l'on peut facilement transposer dans le domaine de la peinture.

**Equation de Giovanelli.** D'après le physicien australien (sic!) du même nom. Dans ce cas, la couche (1) est constituée d'une interface de Fresnel, la couche (2) étant décrite par une BRDF  $R_2(\mu', \mu)$ . Ce cas est un peu plus complexe à traiter, car l'interface de Fresnel n'est pas symétrique "haut-bas", comme nous l'avons déjà mentionné. La figure ci dessous précise les notations des angles : les indices "e" et "i" sont pour *externe* et *interne*.

Les réflectances et transmittances de Fresnel s'écrivent ici, en omettant la dépendance en angle azimutal qui est triviale :

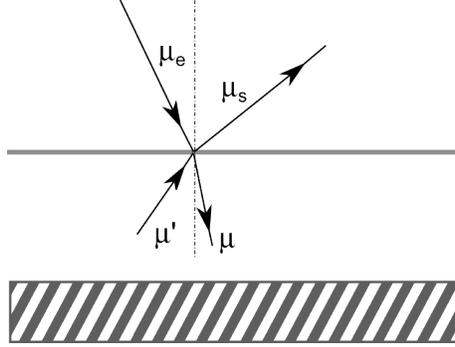


FIGURE 34 – relations de passage de Fresnel

$$\begin{aligned}
 R_1^+(\mu_s, \mu_e) &= r_e(\mu_e) \frac{\delta(\mu_s - \mu_e)}{2\mu_e} \\
 R_1^-(\mu', \mu) &= r_i(\mu) \frac{\delta(\mu' - \mu)}{2\mu} \\
 T_1^+(\mu, \mu_e) &= n^2 t_e(\mu_e) \frac{\delta\left(\mu_e - \sqrt{1 - n^2(1 - \mu^2)}\right)}{2\mu_e} \quad \text{si } \mu^2 > 1 - 1/n^2 \\
 &= 0 \quad \text{sinon} \\
 T_1^-(\mu_s, \mu') &= \frac{1}{n^2} t_e(\mu_s) \frac{\delta\left(\mu' - \sqrt{1 - \frac{(1 - \mu_s^2)}{n^2}}\right)}{2\mu'}
 \end{aligned}$$

la dernière ligne se déduit de la précédente par le remplacement de  $n \rightarrow 1/n$  et on a utilisé  $t_i(\mu') = t_e(\mu_s)$ . La relation de passage s'écrit ici  $R^+ = R_1^+ + T_1^-(1 - R_2^+ R_1^-)^{-1} R_2^+ T_1^+$ , soit, en posant  $K = (1 - R_2^+ R_1^-)^{-1} R_2^+$

$$R^+ = R_1^+ + T_1^- K T_1^+$$

Le premier terme de cette équation correspond à la réflexion spéculaire de l'interface. Les termes en  $T$  assurent les relations de passage à l'interface suivant :

$$T_1^- K T_1^+(\mu_s, \mu_e) = \int 2\mu' d\mu' \frac{1}{n^2} t_e(\mu_s) \frac{\delta\left(\mu' - \sqrt{1 - (1 - \mu_s^2)/n^2}\right)}{2\mu'} K(\mu', \mu) n^2 t_e(\mu_e) \frac{\delta\left(\mu_e - \sqrt{1 - n^2(1 - \mu^2)}\right)}{2\mu_e} 2\mu d\mu$$

l'intégrale sur  $\mu'$  est triviale, mais celle sur  $\mu$  nécessite le changement de variable  $\mu \rightarrow \mu_e$  avec  $n^2 \mu d\mu \rightarrow \mu_e d\mu_e$ , qui donne finalement le résultat presque attendu

(attention au facteur  $1/n^2$  ! ) :

$$T_1^- K T_1^+ (\mu_s, \mu_e) = \frac{1}{n^2} t_e(\mu_s) t_e(\mu_e) K \left( \sqrt{1 - \frac{(1 - \mu_s^2)}{n^2}}, \sqrt{1 - \frac{(1 - \mu_e^2)}{n^2}} \right)$$

On voit dans cette expression apparaître les facteurs de transmission attendus, le changement d'angle dû à la réfraction, et un facteur  $1/n^2$  dû à la concentration des faisceaux par l'interface, et qu'il n'est pas facile de deviner correctement !

Le calcul de  $K$  conduit à l'équation de Giovanelli proprement dite : on a par définition de  $K$

$$K = R_2 + R_2 R_1^- K$$

qui s'écrit de façon développée :

$$K(\mu, \mu_0) = R_2(\mu, \mu_0) + \int_0^1 R_2(\mu, \mu') r_i(\mu') K(\mu', \mu_0) 2\mu' d\mu'$$

avec  $r_i(\mu)$  le coefficient de réflexion de Fresnel interne. Cette dernière équation est l'équation de Giovanelli, qui permet de déterminer la réflexion externe  $K$  (à des préfacteurs près) à partir de la réflexion interne  $R_2$ . On voit que c'est encore une équation intégrale de type Fredholm 2ème espèce.

Exercice : montrer que dans le cas où la couche 2 est Lambertienne de réflectance  $R_F$ , on obtient pour la réflectance totale

$$R(\mu_s, \mu_e) = r_e(\mu_e) \frac{\delta(\mu_s - \mu_e)}{2\mu_e} + \frac{t_e(\mu_s) t_e(\mu_e)}{n^2} \frac{R_F}{1 - r_i R_F}$$

où  $r_i = \int_0^1 r_i(\mu') 2\mu' d\mu' \simeq 0.59$  est le coefficient de réflexion interne moyen, déjà vu au paragraphe (5.3.4). La relation ci dessus constitue une généralisation intéressante de la correction de Saunderson, avec une dépendance angulaire correcte. Montrer de plus que si on s'intéresse à la réflectance direct-diffus  $R(D, \mu_e = 1) = \int R(\mu_s, 1) \mu_s d\mu_s$  on retrouve exactement la correction de Saunderson, vue précédemment.

## 6.8 Equations de Preisendorfer et Mobley

Ces équation permettent d'écrire des équations "à la Schüster-Kubelka-Munk" rigoureuses, à partir de l'ETR. En chantier...

## 7 Conclusion.

Comme souvent, le principal destinataire de ces notes de cours est votre serviteur. Cependant si elle présentent quelque intérêt à vos yeux, ou au contraire si vous voyez des améliorations possible à leur contenu, n'hésitez pas à m'en faire part, ainsi que des erreurs que vous détecterez à l'adresse *frederic.geniet@univ-montp2.fr* . A l'issu de la rédaction je suis bien entendu insatisfait, car c'est trop long, mais il n'y a pas tous les sujets que je souhaiterais aborder : on souhaiterait une voiture grande dedans pour tout transporter, et petite dehors pour la garer! Il est dont temps de mettre un point final à la chose.

## Références

- [1] S. Chandrasekhar, Radiative Transfer, Dover, New York, 1960.
- [2] S. Chandrasekhar, An Introduction to the Study of Stellar Structure, Dover, New York, 1963.
- [3] H.C. Van de Hulst, Light Scattering by Small Particules, Dover, New York, 1957.
- [4] H.C. Van de Hulst, Multiple light scattering, Tables, Formulas and Applications, vols. 1 and 2, Academic Press, New York, 1980.
- [5] L.C. Woods, Introduction to Neutron Distribution Theory, Wiley, New York, 1964.
- [6] J. L. Saunderson, "Calculation of the Color of Pigmented Plastics," J. Optical Society of America, **32**, pp. 727-736, 1942.
- [7] P.E. Pierce & R.T. Marcus, Radiative transfer theory solid color-matching calculations, Color Research & Application **22**, 2, pp. 72-87, 1997.
- [8] Necati Öziçik, Radiative Transfer & Interactions With Conduction & Convection, Wiley-Interscience, 1973.
- [9] I.W. Busbridge, The Mathematics of Radiative Transfer, Cambridge University Press, 1960.
- [10] F. Geniet, Approche de la Couleur, Poly de cours, Université Montpellier 2, 2012.
- [11] R. Courant & D. Hilbert Methods of Mathematical Physics, John Wiley & Sons, 2008.