



HAL
open science

Méthode de conception de composants magnétiques à noyaux pour l'électronique de puissance

Christophe Coillot

► **To cite this version:**

Christophe Coillot. Méthode de conception de composants magnétiques à noyaux pour l'électronique de puissance. Electronique. Université de Montpellier II, 1999. Français. NNT: . tel-01165163

HAL Id: tel-01165163

<https://theses.hal.science/tel-01165163>

Submitted on 23 Jun 2015

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons CC0 - Public Domain Dedication| 4.0 International License

UNIVERSITÉ MONTPELLIER II
-SCIENCES ET TECHNIQUES DU LANGUEDOC-

THÈSE

Présentée à l'Université Montpellier II (Sciences et Techniques du Languedoc)

pour obtenir le titre de :

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ MONTPELLIER II

SPECIALITE : ÉLECTRONIQUE, OPTRONIQUE et SYSTEMES

Formation doctorale : Électronique

École doctorale : Sciences Pour l'Ingénieur

**Méthode de conception de composants magnétiques
à noyaux pour l'électronique de puissance**

Par

Christophe COILLOT

Soutenue le 16 Décembre 1999 devant le jury composé de :

M. ROJAT Gérard	Professeur, CEGELY Lyon	Président
M. NOGAREDE Bertrand	Professeur, INP de Toulouse	Rapporteur
M. MULTON Bernard	Professeur, ENS Cachan	Rapporteur
M. MERLE Pierre	Professeur, Université Montpellier II	Directeur de thèse
M. FOREST François	Professeur, Université Montpellier II	Examineur
M. CHANTRENNE Patrice	Maître de Conférence, I.N.S.A Lyon	Examineur

REMERCIEMENTS

Les travaux présentés dans ce mémoire ont été réalisés au Laboratoire d'Électrotechnique de Montpellier (LEM).

Je souhaite remercier tout particulièrement :

Monsieur Christian GLAIZE, Professeur et Directeur du Laboratoire d'Électrotechnique de Montpellier, pour m'avoir intégré au sein de l'équipe "Électronique de Puissance" ;

Monsieur Pierre MERLE, Professeur à l'Université Montpellier II, pour avoir dirigé cette thèse en m'accordant sa confiance, ainsi que pour ses remarquables qualités humaines ;

Monsieur Gérard ROJAT, Professeur au Centre de Génie électrique de Lyon (CEGELY), pour l'honneur qu'il m'a fait en présidant mon jury de thèse, qu'il trouve ici l'expression de ma profonde gratitude ;

Monsieur Bernard Multon, Professeur à l'antenne de Bretagne de l'ENS de Cachan, d'avoir accepté d'être rapporteur de cette thèse et je profite de cette occasion pour lui témoigner l'admiration que je lui portais lorsqu'il était mon Professeur et qui a été accentuée par nos échanges lors de son travail de rapporteur ;

Monsieur Bertrand Nogarède, Professeur au LEEI, de m'avoir honoré de sa participation au jury en qualité de rapporteur, malgré un emploi du temps chargé ;

Monsieur François Forest, Professeur à l'Université Montpellier II, d'avoir de fait coencadré ce travail de thèse avec patience et bonne humeur, j'ajoute que j'admire autant ses qualités scientifiques que la simplicité avec laquelle il les fait partager ;

Monsieur Patrice Chantrenne, Maître de Conférence au Centre d'Etude Thermique de l'INSA de Lyon (CETHIL), pour les compétences qu'il nous a apportées en thermique et plus encore pour son amitié ;

Monsieur Yves Patin, Professeur Agrégé à l'IUFM de Montpellier, qui m'a entraîné à sa suite dans cette aventure, et je lui dois, au fil de nos échanges, 3 années d'épanouissement intellectuel et humain ainsi qu'une ouverture d'esprit qui s'est développée à son contact ;

Je remercie aussi ceux qui étaient du côté obscur de la thèse :

Michel Delgado : mon binôme (aucun rapport avec son homonyme sportif), Olivier Granier et François Odiot (Popo for ever), Jérôme Fadat (MAD MAXwell) et son aimant permanent Lionel Mazet, les 2 Thierry(s), JC et SM (nos businessmen), Petru Nottinger, Jérôme Matalanana, Franck Lecat, Petite chatte, Fab, Pat, Calou et Nina.

Merci aux permanents du LEM qui étaient toujours là pour suppléer mes déficiences physiques : Olivier Guile (perceur virtuose), Fifi (minutieux poseur de thermocouples), Odile Bastide (secrétaire d'urgence), Christelle Torterat et Eric Ladegaillerie.

Merci aux permanents qui m'ont fait partager leur soif d'électrotechnique : Daniel Matt, Gilles Beauvils, Alain Toureille, Philippe Enrici, Serge Agnel, Charles Joubert (malgré notre dualité), Nicole Daudé (our physicist).

Une pensée pour les anciens qui m'ont communiqué leur passion pour le Montpellier by night sous toutes ses formes : Angel Abenia, Shidoush Siami (nolosé), Patrick Poullot, Jean François Llibre, Patrick Ropa, Hervé Boulant et Nat.

Enfin, je terminerai par remercier mes parents pour la motivation et le soutien qu'ils m'ont apportés tout au long de mes études, ainsi que Marie-Noëlle pour ce bout de chemin parcouru ensemble, éclairé de sa présence.

Il est important de noter que les données présentées dans ce rapport sont basées sur les informations fournies par les participants et ne constituent pas une garantie de leur exactitude. Les résultats peuvent varier en fonction de la méthodologie utilisée et des conditions de l'étude.

Les données ont été analysées à l'aide de logiciels statistiques avancés pour garantir la précision des résultats. Les conclusions tirées de ces analyses sont présentées dans les chapitres suivants. Il est recommandé de consulter ces sections avec attention pour une compréhension approfondie des résultats de l'étude.

En conclusion, les résultats de cette étude soulignent l'importance de la mise en œuvre de stratégies efficaces pour améliorer les performances. Les recommandations formulées dans ce rapport visent à fournir des orientations précieuses pour les décideurs et les praticiens du domaine.

SOMMAIRE

Le présent rapport est structuré de la manière suivante : le premier chapitre présente le contexte de l'étude et les objectifs de la recherche. Le deuxième chapitre décrit la méthodologie employée, y compris les outils et les procédures utilisés. Les chapitres suivants détaillent les résultats obtenus, les discussions et les conclusions finales.

Les résultats de l'étude ont été analysés sous différents angles pour identifier les tendances et les facteurs clés de succès. Les conclusions sont basées sur une analyse rigoureuse des données et sont destinées à servir de guide pour les futures recherches et les applications pratiques.

Enfin, les recommandations formulées dans ce rapport sont destinées à aider les décideurs à prendre des décisions éclairées basées sur les données. Il est essentiel de continuer à surveiller l'évolution des données et d'ajuster les stratégies en conséquence pour maintenir l'efficacité et la pertinence des actions entreprises.

SOMMAIRE

GLOSSAIRE

INTRODUCTION GENERALE

SOMMAIRE	5
INTRODUCTION GENERALE	17
CHAPITRE I : MODÉLISATION ÉLECTROMAGNÉTIQUE.....	21
A. Dimensionnement et représentation des composants magnétiques	23
1. Rôle de l'inductance	23
2. Déclinaison du dimensionnement au présent et au futur	23
3. Modèle électrique équivalent.....	24
B. Étude électromagnétique : côté noyau.....	28
1. Description de l'origine des pertes dans les noyaux magnétiques	28
2. Description d'un composant à noyau torique.....	29
3. Modélisation du noyau : expressions de L_s et R_p	30
C. Étude électromagnétique: côté conducteurs.....	32
1. Outil d'analyse et géométrie étudiée.....	32
2. Calcul de la répartition de la densité de courant	34
a) Solution générale	35
b) Solution particulière : expression de la densité de courant	36
c) Expression de la densité de courant pour un modèle à plusieurs couches.....	36
d) Calcul des pertes Joules dans les conducteurs.....	39
3. simulation 2D.....	44
a) Le mailleur	44
b) Le solveur.....	45
c) Description du composant.....	45
d) Maillage et résultats de simulation préliminaire.....	46
4. Confrontation entre : modélisation - simulation - expérimentation.....	48
a) Contexte.....	48
b) Résultats.....	49
D. Expérimentation	53
1. Mesure des éléments R_{seq} et L_{seq} du modèle série	53

SOMMAIRE

a)	Mesure d'impédance.....	53
b)	Mesure gain-phase.....	56
2.	Confrontation entre le calcul et la mesure des éléments Rseq-Lseq du modèle série.....	59
E.	Bilan de la modélisation électromagnétique.....	62
F.	Bibliographie.....	64
CHAPITRE II : ÉTUDE THERMIQUE STATIONNAIRE.....		65
A.	Outils pour la modélisation thermique.....	67
1.	Étude de la conduction.....	67
a)	Généralités.....	67
b)	Calcul de la résistance thermique d'un tube cylindrique.....	69
c)	Calcul de la résistance thermique radiale d'un cylindre avec une source de chaleur interne.....	70
2.	Étude de la convection.....	71
a)	Généralités.....	71
b)	Approche quantitative de la convection.....	72
c)	Quelques corrélations.....	73
3.	Étude du rayonnement.....	75
a)	Généralités.....	75
b)	Règles de calcul des transferts radiatifs.....	76
c)	Application au cas d'un corps placé dans une enceinte en équilibre thermique.....	78
4.	Quelques ordres de grandeur pour les matériaux de l'Électrotechnique.....	79
B.	Étude thermique d'un bobinage dans l'air.....	80
1.	Description géométrique et physique du composant.....	80
2.	Hypothèses relatives à la conduction.....	81
a)	Conduction dans la direction radiale.....	82
b)	Conduction entre 2 spires : direction transversale.....	83
c)	Conduction dans la direction axiale d'une spire.....	83
d)	Incidence de l'étude de la conduction.....	84
3.	Modélisation de la convection.....	85
a)	Modèle global de la convection.....	85
b)	Modèle local de la convection.....	86
4.	Modélisation du rayonnement.....	87
a)	Rayonnement extérieur.....	87
b)	Rayonnement intérieur.....	87
5.	Calcul numérique d'évolution de la température.....	94
6.	Présentation du banc de mesure.....	95
7.	Vérification expérimentale.....	96

SOMMAIRE

8.	Résultats.....	97
a)	Premiers résultats :Bobine N=27 ; D=40mm ; dc=4mm.....	97
b)	Bobine : N=11 ; Di=33mm ; dcu=2.1mm.....	98
c)	Bobine : N=20 ; Dint=116mm ; dcu=4mm.....	99
d)	Bobine : N=10 ; Dint=116 ; dcu=4mm.....	100
e)	Bobine : N=27 ; Dint=36 ; dcu=4mm.....	100
9.	Conclusion quant à la validité du modèle.....	101
C.	Étude thermique d'une inductance à noyau torique.....	102
1.	Description physique et géométrique de l'inductance à noyau torique.....	102
2.	Modélisation de la conduction.....	104
3.	Modélisation de la convection.....	106
4.	Modélisation du rayonnement.....	107
a)	Flux de chaleur rayonnés par les faces supérieure, inférieure et extérieure.....	108
b)	Flux de chaleur rayonné par la face intérieure.....	109
5.	Les échanges entre noyau et conducteurs par conduction.....	111
6.	Calcul numérique de la température.....	111
7.	Vérification expérimentale.....	112
8.	Méthodologie de l'expérimentation.....	114
9.	Équivalence thermique.....	115
10.	Vérification expérimentale en alternatif.....	116
a)	Résultats.....	117
11.	Conclusion.....	118
D.	Modèle thermique simplifié de l'inductance à noyau torique.....	119
1.	Description de la modélisation simplifiée.....	119
2.	Résolution numérique à partir du modèle thermique simplifié.....	120
E.	Conclusion.....	122
F.	Bibliographie.....	123
CHAPITRE III : ETUDE THERMIQUE INSTATIONNAIRE.....		125
A.	Présentation d'une méthode de calcul des sources de chaleur originale issue de la thermomécanique.....	127
1.	Position du problème.....	127
2.	Modélisation thermique instationnaire.....	127
3.	Outil de passage des températures aux sources de chaleur.....	128
a)	Présentation de l'outil.....	129
b)	expression de τ_{eq} en fonction du coefficient d'échange.....	130

SOMMAIRE

B.	Transposition de la méthode pour la mesure des pertes dans un bobinage.....	133
1.	Principe du calcul des pertes (DC) dans un bobinage par identification de τ_{eq}	133
2.	Application de la méthode de calcul des pertes	134
a)	Mesures de température et leur exploitation pour le calcul des pertes.....	134
b)	Filtrage des pertes	136
c)	Corrélation aux mesures électriques	137
3.	Calcul des pertes : utilisation du modèle thermique stationnaire.....	138
a)	Expression de l'équation de la chaleur : modélisation fine du coefficient d'échange.....	138
b)	Confrontation du modèle avec coefficient d'échange linéarisé au modèle thermique stationnaire 139	
c)	Résultats pour un courant d'intensité 15A	140
d)	Résultats pour un courant d'intensité 30A	142
4.	Conclusion sur la faisabilité.....	144
C.	Transposition de la méthode pour la mesure des pertes dans une inductance à noyau torique ...	145
1.	Démarche pour la transposition de l'étude à l'inductance à noyau torique.....	145
2.	Outil de passage des températures aux sources de chaleur	146
3.	Exploitation des mesures en continu pour l'identification des constantes de temps.....	150
a)	estimation intuitive et expérimentale des constantes de temps.....	150
b)	Calcul des sources de chaleur à partir des relevés de température.	155
4.	Utilisation du modèle thermique stationnaire pour décrire le régime instationnaire.....	156
a)	Expression de l'équation de la chaleur : modélisation fine des échanges thermiques.....	156
b)	Calcul des sources de chaleur à partir de la modélisation thermique stationnaire.....	157
5.	Calcul des sources de chaleur en alternatif	159
a)	Calcul des sources de chaleur à partir des mesures de température & corrélation aux mesures électriques (f=50Hz).....	159
b)	Calcul des sources de chaleur à partir des mesures de température & corrélation aux mesures électriques (f=500Hz).....	163
D.	Conclusion.....	167
E.	Bibliographie.....	169

CHAPITRE IV : NOUVELLE PROCÉDURE DE DIMENSIONNEMENT :

L'OPTIMISATION..... 171

A.	De l'optimisation vers le dimensionnement	173
1.	Formulation d'un problème en termes d'optimisation	173
a)	Introduction	173
b)	Syntaxe d'un problème d'optimisation.....	174

SOMMAIRE

2.	Formalisation du dimensionnement d'un composant magnétique.....	174
a)	Transposition du problème de dimensionnement.....	174
B.	Résolution d'un problème mathématique d'optimisation	177
1.	Algorithmes de minimisation.....	177
a)	Méthodes directes.....	178
b)	Présentation des méthodes de descente.....	180
2.	Transformation d'un problème d'optimisation en problème de minimisation.....	185
a)	Méthode des pénalisations extérieures.....	185
b)	Méthode des multiplicateurs de Lagrange.....	188
c)	Méthode de transformation hybride proposée.....	189
d)	Pénalisation des contraintes inégalité.....	190
3.	Transposition d'un problème mathématique d'optimisation en dimensionnement physique.....	191
a)	Normalisation.....	191
b)	Formulation de la fonction objectif.....	192
C.	Minimisation de l'inductance parasite d'un condensateur à couronnes internes.....	194
a)	Formulation de la minimisation de l'inductance parasite des condensateurs à couronnes internes...195	
b)	résultats de l'optimisation.....	197
D.	Dimensionnement d'une inductance à noyau torique.....	198
1.	Définition d'un cahier des charges.....	198
2.	Procédure de dimensionnement initial.....	201
3.	Procédure d'optimisation.....	204
4.	Effets du dimensionnement initial.....	207
5.	Effets de la renormalisation.....	208
6.	Effet de la pondération.....	209
7.	Problème du choix de la fréquence.....	209
a)	La fréquence comme variable du dimensionnement.....	209
b)	Evolution de la solution optimale paramétrée par la fréquence.....	211
E.	Conclusion.....	212
F.	Bibliographie.....	213
	CONCLUSION GENERALE.....	215
	ANNEXES.....	221

Glossaire des principaux symboles utilisés

Les surfaces des composants étudiés sont divisées en **extérieure**, **intérieure**, **supérieure** et **inférieure**. Les indices correspondants : **ext**, **int**, **sup**, **inf** sont attribués, aux coefficients d'échange, aux surfaces ou aux flux de chaleur sur les faces correspondantes (cf. **Figure 42**).

Les indices *conv*, *ray*, *cond*, sont attribués à la modélisation de phénomènes respectivement convectifs, radiatifs, et conductifs.

q : flux de chaleur surfacique ($W.m^{-2}$),

Φ : flux de chaleur (W),

ρ : densité volumique de flux de chaleur ($W.m^{-3}$),

\bar{h} : coefficient de convection moyen ($W.m^{-2}.\text{°}K^{-1}$),

$h(x)$: coefficient d'échange ou de convection à la hauteur x ($W.m^{-2}.\text{°}K^{-1}$),

Les paramètres thermophysiques des fluides :

β : coefficient d'expansion en température du fluide ($\text{°}K^{-1}$),

μ : viscosité dynamique du fluide ($kg / (ms)$),

u_r : vitesse relative du fluide par rapport à la paroi (m / s),

g : attraction de la pesanteur ($9.8 m / s^2$)

$\nu = \mu / \rho$: viscosité cinématique (m^2 / s),

a : diffusivité thermique (m^2 / s),

δ_T : épaisseur de la couche limite (m).

Propriétés thermophysiques de l'air d'après [1] :

Température du film d'air :	ρ (kg / m^3)	β ($\text{°}K^{-1}$)	μ ($kg / m.s$)	ν (m^2 / s)	a (m^2 / s)	λ_{air} ($W.\text{°}K^{-1}m^{-2}$)
300°K	1.177	0.00333	1.85×10^{-5}	1.85×10^{-5}	1.85×10^{-5}	0.0262
350°K	0.998	0.00286	1.85×10^{-5}	1.85×10^{-5}	1.85×10^{-5}	0.03
400°K	0.883	0.00250	1.85×10^{-5}	1.85×10^{-5}	1.85×10^{-5}	0.0337

GLOSSAIRE

Les indices : c, f , sont affectés respectivement au conducteur en cuivre et au noyau en poudre de fer.

T : température de la surface ($^{\circ}K$),

T_{amb} : température ambiante,

$\overline{T_f}$: température moyenne du fluide,

ε : émissivité de la surface

λ : conductivité thermique ($W \cdot ^{\circ}K^{-1}m^{-2}$)

ρ : masse volumique (kg / m^3)

C : capacité calorifique

Les grandeurs électriques sont définies de façon commune quelque soit le composant (inductance à air ou noyau torique, bien que l'inductance à air ne soit pas concernée par les grandeurs relatives au noyau) :

I : Intensité efficace du courant électrique (A),

U : valeur efficace de la tension, (V)

f : fréquence des courants (Hertz),

B : induction maximale (Teslas),

B_g : induction maximale en Gauss ($B_g = B \times 10^4$)

P_f : Pertes dans les matériaux magnétiques dues à l'hystérésis et aux courants de Foucault (W),

pf : Pertes dans les matériaux magnétiques dues à l'hystérésis et aux courants de Foucault par unité de volume (W / m^3),

P_j : Pertes dans les conducteurs par effet Joule (W),

μ_0 : perméabilité de l'air ($4\pi 10^{-7} SI$),

μ_r : perméabilité relative initiale du matériau,

μ_r : perméabilité relative du matériau (fonction du niveau d'induction et de la perméabilité relative initiale),

Les définitions des grandeurs descriptives de la géométrie sont propres à chacun des composants, nous précisons donc les grandeurs relatives à l'inductance à air, puis à l'inductance à noyau torique :

-Inductance à air :

GLOSSAIRE

D : diamètre moyen de la bobine (m),

d_c : diamètre du conducteur (incluant l'émail) (m),

N : nombre de spires,

$V_c = N\pi \frac{d_c^2}{4} \pi D$: Volume du bobinage (m^3),

τ_{th} (s): constante de temps de retour à la température ambiante

-Inductance à noyau torique :

N : nombre de spires,

S : section du matériau magnétique (m^2),

l : longueur moyenne du circuit magnétique (m),

V_n : volume du noyau (m^3).

V_c : volume du bobinage (m^3)

INTRODUCTION GENERALE

INTRODUCTION GENERALE

L'épanouissement des applications techniques de l'électricité, qui a débuté à l'aube du XX^e siècle, continue de bouleverser notre quotidien. Ainsi, il est agrémenté par le résultat de cette évolution : l'éclairage devenu aussi évident que la nuit est noire, la chaleur dans notre demeure s'est émancipée des caprices de la nature, l'électroménager s'est fait complice de l'homme moderne. Sans oublier les systèmes électriques à qui nous déléguons les tâches les plus fastidieuses. Au crépuscule de ce siècle, quel bond gigantesque ferait encore notre discipline si ses bénéfices devenaient accessibles à tous et à toutes.

En plein essor l'électrotechnique s'est scindée en électrotechnique et électronique de puissance. Cette branche, qui est préoccupée par les signaux véhiculant l'énergie électrique, est elle-même partagée entre l'étude des semi-conducteurs et celle des composants passifs. Ces deux disciplines sont imbriquées l'une dans l'autre et l'avancée de l'une favorise l'évolution de l'autre. Les progrès réalisés dans l'étude des semi-conducteurs ont aujourd'hui pour conséquence la montée en fréquence de fonctionnement des convertisseurs statiques ; lesquels réunissent des composants à semi-conducteurs et des composants passifs. Cette montée en fréquence permet de réduire les volumes dans la limite de l'évacuation de chaleur des composants. La montée en fréquence fait apparaître de nouvelles exigences tant sur les commutations des interrupteurs que sur le comportement des composants passifs. L'excursion en fréquence met en exergue les imperfections des composants passifs et l'influence de phénomènes jusqu'alors négligés.

Dans ce contexte, l'étude des composants passifs est devenue nécessaire à la poursuite de cette évolution. Ce mémoire de thèse présente l'étude d'une catégorie de composants passifs : les inductances, pour une formulation plus générale du dimensionnement : l'optimisation. Cette étude se veut une contribution à la modélisation thermique et électromagnétique des inductances pour une géométrie particulière : l'inductance à noyau torique.

Le **chapitre 1** présente une modélisation électromagnétique de l'inductance à noyau torique. Tout particulièrement l'effet de la fréquence et de la géométrie sur la répartition de la densité

INTRODUCTION

de courant. Celle-ci entraîne alors des pertes supplémentaires qui se traduisent par une élévation de température.

Dans le **chapitre 2**, une modélisation thermique stationnaire basée sur une description physique des échanges de chaleur est couplée à la description électromagnétique. La modélisation thermique est développée selon les trois modes de transfert de chaleur : conduction, convection et rayonnement. La validation de cette modélisation passe par une connaissance précise des pertes dans chacun des matériaux constituant l'inductance.

Au détour de nos réflexions sur la modélisation thermique stationnaire, le **chapitre 3** présente un outil d'analyse des pertes dans les matériaux au moyen de mesures de températures en régime dynamique. Cette étude qui déborde du cadre de l'optimisation est toutefois intimement liée à la modélisation thermique stationnaire. Cet outil utilisé par une équipe de chercheurs en thermomécanique est transposé à notre problème puis, prolongé par la modélisation thermique stationnaire. Cet outil laisse entrevoir la possibilité d'obtenir une séparation des pertes dans les matériaux, voire une détermination locale des pertes.

Les éléments de la modélisation établis aux chapitres 1 et 2 permettent la formulation d'un dimensionnement reposant sur des modélisations physiques rigoureuses. Le dimensionnement prend davantage de liberté au **chapitre 4** lorsqu'il s'agit de le formuler en termes d'optimisation. A cet effet, un algorithme d'optimisation est développé, dont les résultats sont corroborés à ceux d'un algorithme génétique. Contrairement aux problèmes mathématiques, les grandeurs à optimiser (dimensions géométriques, fréquence, etc.) possèdent des unités et des échelles différentes. C'est pourquoi nous nous sommes intéressés dans ce chapitre à la formulation du problème en termes d'optimisation.

Chapitre I : Modélisation électromagnétique

A. Dimensionnement et représentation des composants magnétiques

1. Rôle de l'inductance

L'inductance a la capacité de stocker, puis de restituer de l'énergie de manière transitoire. Cette propriété est mise à contribution dans la réalisation de nombreuses conversions de l'électronique de puissance. Les fonctions qui lui sont généralement assignées sont :

- ◆ le lissage de la composante continue d'un signal,
- ◆ le filtrage des harmoniques d'un signal alternatif,

mais un recul supplémentaire incite à unifier ces fonctions pour un même rôle qui est le filtrage d'un signal. La nuance entre le lissage et le filtrage n'étant que le reflet du gabarit du filtre désiré.

2. Déclinaison du dimensionnement au présent et au futur

Les principaux matériaux constituant de l'inductance sont le cuivre pour le conducteur, le fer pour canaliser le champ magnétique d'induction, les polymères intervenant dans l'isolation des matériaux et l'air. Le dimensionnement consiste à proposer l'articulation de ces matériaux permettant de respecter le cahier des charges d'une application. Ces matériaux lorsqu'ils sont assemblés de manière et dans des proportions différentes permettent de réaliser les condensateurs, les transformateurs ou encore les machines électriques.

Le dimensionnement consiste à déterminer les proportions de chacun de ces matériaux à mettre en œuvre afin de respecter un cahier des charges. Actuellement, les procédures de dimensionnement conservent des modèles simplifiés des phénomènes, qui ne permettent pas de maîtriser tous les impacts du dimensionnement.

Pourtant de nombreux efforts sont entrepris pour améliorer l'intégration de l'inductance (i.e. réduire son volume). Certes, par des chemins détournés : en augmentant la fréquence de commutation des interrupteurs mais aussi en adoptant des lois de commande telle que la modulation de largeur d'impulsion utilisée dans les alimentations à découpage. Bien que très peu d'études directes lui soient consacrées (il suffit pour s'en convaincre de comparer le poids des publications relatives aux convertisseurs, à celui de publications relatives au

CHAPITRE I

dimensionnement de composants passifs), ces attentions font de lui un enfant gâté. Il devient capricieux et chauffe de façon imprévue. La maîtrise de la température est nécessaire pour les raisons suivantes :

- la température altère les propriétés du matériau magnétique,
- la température vieillit prématurément les isolants,
- les pertes augmentent avec la température...

Toutefois, la réduction de la température de fonctionnement se fait au détriment du volume du composant, il serait donc préférable de parvenir à un composant présentant un bon compromis entre ce qui élève sa température (les pertes) et son volume. Le dimensionnement devrait également prendre en considération le couplage entre la modélisation électromagnétique et la modélisation thermique. Ces deux aspects seront donc abordés puis rassemblés autour de la procédure de dimensionnement. Celle-ci sera formulée en termes d'optimisation et résolue par la mise en œuvre d'algorithmes d'optimisation classiques. Afin d'ancrer notre travail dans le réel, nous exploiterons les données d'un catalogue constructeur [2] concernant tant les matériaux que les géométries disponibles. Ainsi ce problème d'optimisation aura comme particularité de gérer des variables continues et discrètes.

3. Modèle électrique équivalent

En basse fréquence, un composant bobiné peut être représenté par une résistance série, une inductance et une résistance parallèle. En haute fréquence, les effets capacitifs deviennent influents et la modélisation électrique requiert l'ajout de capacités [3]. Pour notre part nous nous intéresserons à la modélisation basse fréquence. La **Figure 1 (a)** représente le modèle électrique de l'inductance. Notons qu'il est souvent plus commode de représenter la résistance parallèle aux bornes de l'ensemble conformément à la **Figure 1 (b)**, parce que la chute de tension aux bornes de la résistance série est faible pour les fréquences envisagées.

L'inductance (L) en nH du composant, que nous supposons indépendante de la fréquence peut être calculée à partir des données du constructeur, en fonction du nombre de spires (N), et de la perméance (Al) :

$$L = N^2 Al \quad (1)$$

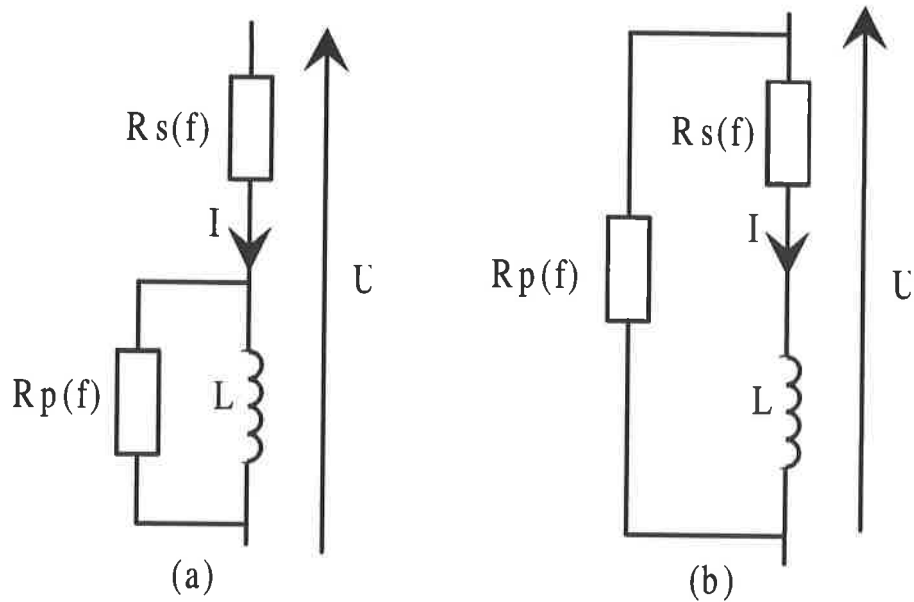


Figure 1 : Schéma équivalent d'une inductance (Moyennes Fréquences)

A partir des dimensions du circuit magnétique, de façon classique, on exprime l'inductance :

$$L = \frac{N^2 \mu_0 \mu_r S}{l} \quad (2)$$

La résistance série (R_c) rend compte des pertes par effet Joules dans le bobinage, tandis que la résistance parallèle (R_p) témoigne des pertes dans le noyau, bien qu'en réalité cette représentation ne soit valable que pour une valeur du champ d'induction donnée. La fréquence modifie notablement ces résistances.

- D'une part, la répartition des courants dans les conducteurs est modifiée, deux effets sont classiquement distingués à savoir l'effet de peau et l'effet de proximité [4]. Nous nous intéresserons au calcul de cette résistance.
- D'autre part, les pertes dans le noyau dues aux phénomènes d'hystérésis et à la circulation de courants de Foucault dans le volume du noyau (V_n) sont influencées par le niveau d'induction en Teslas (B) (donné en Gauss (B_g) par les constructeurs) et la fréquence (f). En revanche, pour un matériau donné les constructeurs proposent des formules empiriques censées modéliser ces pertes, desquelles on peut déduire la résistance du modèle équivalent, mais leur tolérance est de $\pm 15\%$!

CHAPITRE I

Ces formules, qui expriment p_f en mW/cm^3 et P_f en W , prennent la forme générale (notamment d'après [2]) :

$$\begin{aligned} p_f &= (aB_g^c f^d) \\ P_f &= 10^3 (aB_g^c f^d) V_n \end{aligned} \quad (3)$$

Ou, la valeur maximale du champ d'induction exprimée en Teslas (B) ($B_g(\text{Gauss})=10000B(\text{Teslas})$), peut être déduite des valeurs des grandeurs électriques (U et f) et géométriques (N et S), puisqu'en sinusoïdal, la loi de Lenz s'écrit :

$$U = 4.44BNSf \quad (4)$$

Ainsi de (3) & (4) nous déduisons, l'expression empirique de la résistance parallèle en fonction de la fréquence, en posant :

$$P_f = \frac{U^2}{R_p}$$

Cette résistance dépend ainsi du matériau utilisé et de la géométrie du noyau :

$$R_p = \frac{(4.44NS)^c}{10^{(4c+3)} aV_n} U^{2-c} f^{c-d} \quad (5)$$

Des valeurs couramment utilisées des coefficients c et d, malgré de fortes disparités entre les matériaux, sont :

$$c=2 \text{ et } d=1.$$

L'expression particulière de cette résistance, met en exergue une simple proportionnalité avec la fréquence :

$$R_p \approx \frac{(4.44NS)^2}{10^{11} aV_n} f$$

CHAPITRE I

La connaissance des éléments du modèle équivalent de l'inductance doit être complétée par l'étude de la résistance des conducteurs. La partie suivante sera consacrée à l'étude électromagnétique d'une inductance à noyau torique. Il y sera développé des mesures d'impédance permettant d'éprouver les modèles, un calcul de la résistance des conducteurs en régime sinusoïdal assorti de la comparaison à des simulations.

B. Étude électromagnétique : côté noyau

Bien que par la suite nous utilisions exclusivement les formules empiriques données par le constructeur, nous allons commencer par présenter l'origine physique des pertes.

1. Description de l'origine des pertes dans les noyaux magnétiques

L'hypothèse la plus simple qui est formulée pour illustrer le comportement des matériaux magnétiques est l'hypothèse de linéarité au nom de quoi on explicite la relation entre le champ d'induction (B) et le champ d'excitation (H), soit $B = \mu H$. Dans les faits, cette relation est bien plus complexe.

Dans le cas général d'un matériau magnétique [5], la relation entre B et H est représentée par une courbe ayant l'allure de la courbe **Figure 2**. Cette courbe décrit un cycle qualifié d'hystérésis. Il n'existe pas à ce jour d'expressions analytique rigoureusement déterminée pour décrire cette courbe. Les auteurs utilisent essentiellement des modèles physiques dont les coefficients sont ajustés de manière à annuler l'erreur entre la fonction et la mesure.

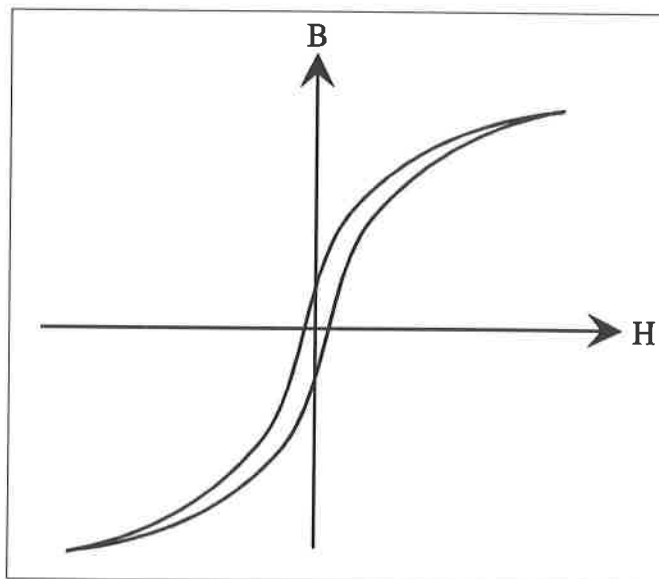


Figure 2 : Cycle d'hystérésis.

L'aire du cycle d'hystérésis correspond à l'énergie perdue au cours d'un cycle. Celle-ci a deux causes : la circulation de courants dans le matériau magnétique, ce sont les pertes par courants de Foucault, et le freinage du déplacement des parois séparant les domaines magnétiques, ce sont les pertes par hystérésis.

CHAPITRE I

Ainsi, le cycle tel que nous le visualisons sur nos oscilloscopes combine les deux phénomènes, si bien qu'à notre échelle l'aire de ce cycle révèle à la fois l'aire du cycle d'hystérésis et l'aire dans le repère B(H) due aux courants induits. Ces pertes sont résumées par les corrélations proposées par les constructeurs de noyau. Par la suite nous utiliserons ces corrélations.

2. Description d'un composant à noyau torique

L'inductance à noyau torique représentée schématiquement sur la **Figure 3** est constituée d'un bobinage de N spires, de diamètre d_c , traversées par un courant d'intensité efficace I, enroulée autour d'un noyau de forme torique caractérisé par son diamètre extérieur (D_e), son diamètre intérieur (D_i), sa hauteur (h) dont découlent ses caractéristiques magnétiques, la section de passage du flux (S), et la longueur moyenne des lignes de champ (l).

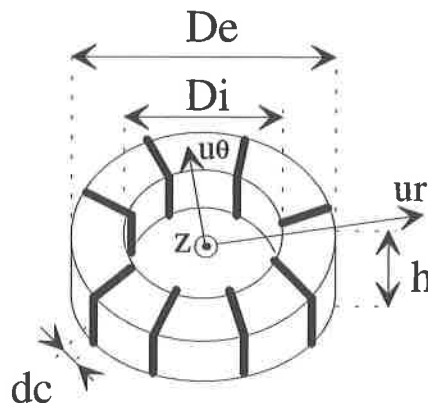


Figure 3 : Schéma représentatif d'une inductance à noyau torique

Nous avons sélectionné un noyau à base de poudre de fer dans [3]. Le matériau retenu référencé 26 présente les caractéristiques suivantes, en ce qui concerne les coefficients intervenant dans l'expression des pertes fer (3), les caractéristiques constructeurs sont présentées en **Annexe 1** :

pour $f < 10\text{kHz}$: $a = 2.07 \cdot 10^{-8}$
 $c = 2.03$
 $d = 0.99$

pour $f > 10\text{kHz}$: $a = 6.94 \cdot 10^{-10}$
 $c = 2.03$
 $d = 1.36$

CHAPITRE I

Plusieurs tailles de noyau sont disponibles, les dimensions de l'objet sur lequel ont porté les expérimentations sont contenues dans le Tableau 1.

De	46.7 mm
Di	24.1 mm
H	18 mm
Dc	2 mm
N	28 spires

Tableau 1 : Caractéristiques géométriques du composant test.

L'inductance à noyau torique est présentée sur la **Figure 4**.

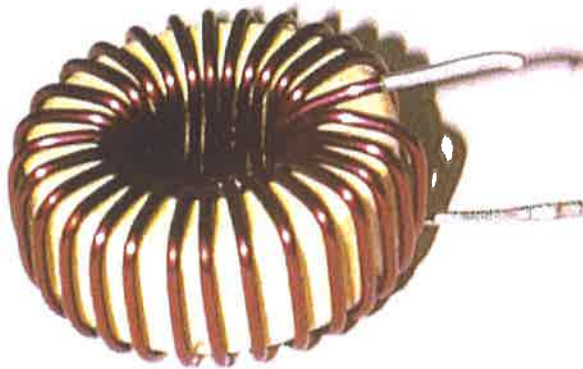


Figure 4 : Photographie d'une inductance à noyau torique.

3. Modélisation du noyau : expressions de L_s et R_p

Les corrélations fournies par le constructeur permettent d'établir les expressions analytiques régissant l'évolution des pertes et de la perméabilité dans le noyau. Il reste à en déduire les expressions des éléments L_s et R_p du modèle électrique de la **Figure 1 (b)**.

Commençons par l'expression de R_p . Compte tenu de l'équation (5), et des caractéristiques du matériau précitées, alors la résistance représentative des pertes dans le noyau s'exprimera différemment selon la fréquence envisagée, soit :

$$R_p = 7.55 \times 10^{-3} \frac{(NS)^{2.03}}{V_n} U^{-0.03} f^{1.04} \quad (f < 10\text{kHz}) \quad (6)$$

$$R_p = 0.225 \frac{(NS)^{2.03}}{V_n} U^{-0.03} f^{0.67} \quad (f > 10\text{kHz})$$

Précisons le calcul du coefficient d'auto-induction du composant L_s . Pour cela on considère que la réactance $L\omega$ est très supérieure à la résistance des conducteurs, ce qui est largement vérifié pour notre composant dans la gamme de fréquences envisagée.

Soit : $U_L \approx U = 4.44 \times 10^4 B_g NSnf$, combiné à la formulation empirique (d'après [2]) de la relation entre la perméabilité et le niveau d'induction, (les allures de ces caractéristiques constructeurs sont présentées en **Annexe 1**) :

$$\mu_r = \frac{\mu_{ri}}{100} \left(\frac{a' + c' B_g + e' B_g^2}{1 + b' B_g + d' B_g^2} \right)^{0.5} \quad (7)$$

(N.B. Les notations employées pour les perméabilités sont cohérentes avec celles employées dans [5]).

Les valeurs des coefficients de la corrélation qui précède, pour le matériau utilisé (26), sont :

μ_{ri}	A'	b'	C'	d'	E'
75	10600	7.21×10^{-5}	37.8	-7.74×10^{-9}	-3.56×10^{-3}

A partir de la corrélation donnant la perméabilité réelle (équation (7)), à laquelle nous substituons la variable B_g par la tension U , et de l'équation (2) nous obtenons une expression de L faisant intervenir les paramètres géométriques, le niveau de tension et la fréquence :

$$L_s = \frac{N^2 \mu_0 S}{l} \frac{\mu_{ri}}{100} \left(\frac{a' + c' \frac{U}{4.44 NSf 10^4} + e' \left(\frac{U}{4.44 NSf 10^4} \right)^2}{1 + b' \frac{U}{4.44 NSf 10^4} + d' \left(\frac{U}{4.44 NSf 10^4} \right)^2} \right)^{0.5} \quad (8)$$

Bien que la perméabilité dépende également de la fréquence, de la température, du niveau du champ d'excitation continu, nous nous contenterons de cette expression qui est justifiée par les conditions particulières de l'étude électromagnétique ($f < 1\text{MHz}$; $\theta = \theta_{\text{ambient}}$; $H_{dc} = 0$ A/m).

C. Étude électromagnétique: côté conducteurs

La détermination des pertes en alternatif dans les conducteurs et dans le noyau est un élément important du dimensionnement, puisqu'associée à la modélisation thermique, elle nous permet d'évaluer la température des matériaux. C'est une étape qui est indispensable, mais qui n'est guère prise en compte dans les procédures de dimensionnement des constructeurs. Concernant les pertes dans les conducteurs, si nous considérons la géométrie réelle de ce composant, une étude analytique rigoureuse 3D est exclue. Néanmoins, à l'aide d'un logiciel de simulation (MAXWELL2D cf. [6]) il est possible d'utiliser des éléments de la géométrie réelle pour obtenir de premiers résultats. Parallèlement, nous effectuerons une approche analytique basée sur une géométrie simplifiée. Les résultats seront comparés à ceux des simulations ainsi qu'aux mesures effectuées à l'aide d'un analyseur d'impédance HP4194A.

1. Outil d'analyse et géométrie étudiée

Les courants à travers les conducteurs en alternatif obéissent aux équations de Maxwell-Ampère laquelle relie le champ d'excitation H à la densité de courant J et Maxwell-Faraday laquelle relie le champ électrique E au champ d'induction B :

$$\vec{\text{rot}} \vec{H} = \vec{J} \quad (9)$$

$$\vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (9) \text{ Bis}$$

complétées, dans l'hypothèse d'un comportement linéaire des matériaux de conductivité σ et de perméabilité μ , par les équations constitutives des matériaux :

$$\begin{aligned} \vec{J} &= \sigma \vec{E} \\ \vec{B} &= \mu \vec{H} \end{aligned} \quad (10)$$

Ces équations nous permettent d'obtenir une équation différentielle qui s'exprime uniquement en fonction de la densité de courant :

$$\begin{aligned} \vec{\text{rot}} \vec{\text{rot}} \vec{E} &= -\vec{\text{rot}} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ &= -\mu \frac{\partial}{\partial t} \vec{\text{rot}} \vec{H} \\ &= -\mu \frac{\partial \vec{J}}{\partial t} \end{aligned}$$

dont il découle finalement :

$$\vec{\text{rot}} \vec{\text{rot}} \vec{J} = -\sigma \mu \frac{\partial \vec{J}}{\partial t} \quad (11)$$

La résolution de cette équation est possible dans le cas du régime harmonique et pour une géométrie monodimensionnelle. La solution nécessite le calcul des constantes, ce qui peut-être obtenu par l'équation initiale liant H et J. La première simplification consiste à rassembler les conducteurs en une couche conductrice de même épaisseur, que nous nommerons par la suite "couronne". Le problème demeure tridimensionnel. Une seconde simplification consiste à n'étudier qu'un plan de coupe (tore de longueur infinie, cf. système d'axe de la **Figure 3**). Cette simplification nous amènera à calculer pour les conducteurs situés sur les faces supérieures et inférieures des pertes médianes. L'hypothèse d'un tore de longueur infinie se justifie par le fait que les pertes dans les conducteurs situés à l'intérieur et à l'extérieur dépendent essentiellement de la valeur du champ d'excitation sur la paroi du noyau. Aussi, cela n'influera que sur les parties coudées des conducteurs.

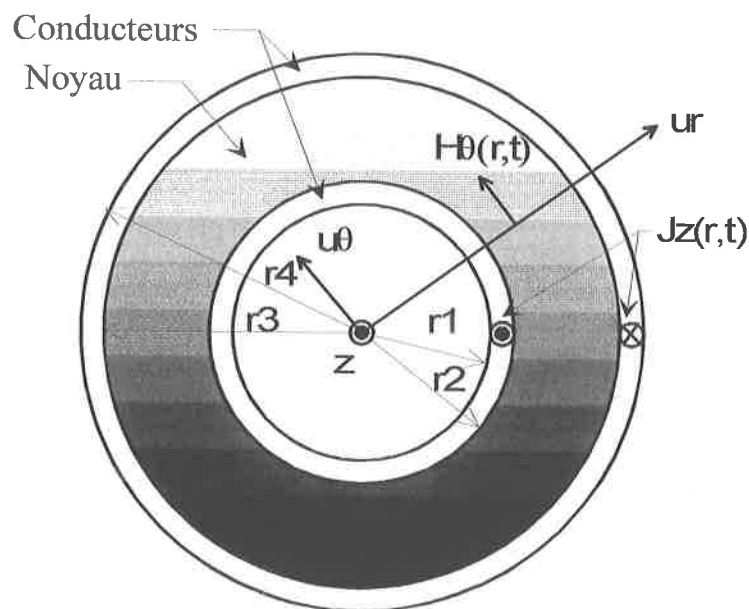


Figure 5 : Géométrie simplifiée du tore.

CHAPITRE I

Nous proposons donc de résoudre l'équation (11) sur la géométrie de la figure ci dessous. Dans le repère cylindrique, le vecteur champ d'excitation est fonction du rayon r et est porté par \vec{u}_θ . Le vecteur densité de courant est également fonction de r mais est porté par \vec{z} perpendiculaire au plan de la **Figure 5**.

2. Calcul de la répartition de la densité de courant

La méthodologie de la résolution est inspirée de celle développée dans [7]. Puisque le vecteur \vec{J} , ne possède qu'une composante selon \vec{z} et ne dépend que du rayon r , en coordonnées cylindriques, le terme de gauche dans l'équation (11) s'exprime:

$$\vec{\text{rot}} \vec{\text{rot}} \vec{J} = -\frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial r} \frac{\partial \vec{J}}{\partial r} = -\frac{1}{r} \left(\frac{\partial \vec{J}}{\partial r} + r \frac{\partial^2 \vec{J}}{\partial r^2} \right)$$

Du fait que les courants soient sinusoïdaux, on peut décomposer \vec{J} et \vec{H} de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \vec{J} &= J(r) e^{j\omega t} \vec{z} \\ \vec{H} &= H(r) e^{j\omega t} \vec{u}_\theta \end{aligned}$$

L'équation (11) devient donc, après avoir simplifié le terme $e^{j\omega t}$:

$$\frac{\partial^2 J(r)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial J(r)}{\partial r} - j\sigma\mu\omega J(r) = 0 \quad (12)$$

Quant au terme de gauche de l'équation (9)Bis, il s'exprime :

$$\vec{\text{rot}} \vec{E} = \frac{1}{\sigma} \vec{\text{rot}} \vec{J} = -\frac{1}{\sigma} \frac{\partial J(r)}{\partial r}$$

CHAPITRE I

Puisque le vecteur H , ne possède qu'une composante selon \vec{u}_θ et ne dépend que du rayon r que nous notons $H(r)$, l'équation (9)Bis devient finalement :

$$\frac{\partial J(r)}{\partial r} = j\sigma\mu\omega H(r) \quad (13)$$

a) *Solution générale*

La solution générale de l'équation (12) est donnée dans [8], en posant $k = \sqrt{\sigma\mu\omega}$ (équation (14)). Toutefois, on a coutume, en électrotechnique, de faire intervenir l'épaisseur de peau

$$\delta p = \sqrt{\frac{2}{\sigma\mu\omega}} \quad (\text{équation (14)Bis}):$$

$$J(r) = J_0 B_0(krj^{3/2}) + J_1 K_0(krj^{1/2}) \quad (14)$$

$$J(r) = J_0 B_0\left(\frac{\sqrt{2}}{\delta p} rj^{3/2}\right) + J_1 K_0\left(\frac{\sqrt{2}}{\delta p} rj^{1/2}\right) \quad (14)\text{Bis}$$

J_0 et J_1 sont des constantes à déterminer, B_0 est une fonction de Bessel de première espèce et K_0 une fonction de Bessel modifiée de seconde espèce. Pour les calculs, il est plus simple d'effectuer un changement de variable, en faisant intervenir une variable notée Δr telle que :

$$\Delta r = r\sqrt{2} / \delta p.$$

En outre, nous décomposerons la partie réelle et la partie imaginaire des fonctions de Bessel en faisant intervenir les fonctions de Kelvin Br , Bi , Kr , Ki :

$$B_0(\Delta rj^{3/2}) = Br(\Delta r) + jBi(\Delta r) \quad (15)$$

$$B_0(\Delta rj^{-3/2}) = Br(\Delta r) - jBi(\Delta r)$$

$$K_0(\Delta rj^{1/2}) = Kr(\Delta r) + jKi(\Delta r)$$

$$K_0(\Delta rj^{-1/2}) = Kr(\Delta r) - jKi(\Delta r)$$

CHAPITRE I

Quant aux dérivées des fonctions de Bessel, nous noterons :

$$Br'(\Delta r) = \frac{dBr(\Delta r)}{d\Delta r} \text{ avec } \frac{dBr(\Delta r)}{dr} = \frac{\sqrt{2}}{\delta p} \frac{dBr(\Delta r)}{d\Delta r}$$

b) *Solution particulière : expression de la densité de courant*

Pour déterminer les constantes J_0 et J_1 nous faisons intervenir l'équation (13). En effet, les conditions aux limites pour le champ d'excitation sont faciles à exprimer :

pour $r \leq r_1$ et $r \geq r_4$ $H(r) = 0$, soit $H(r_1) = H(r_4) = 0$

pour $r_2 \leq r \leq r_3$ $H(r) = \frac{NI}{2\pi r}$, soit $H(r_2) = \frac{NI}{2\pi r_2}$ et $H(r_3) = \frac{NI}{2\pi r_3}$.

Le calcul de $J(r)$ doit être mené indépendamment pour les conducteurs intérieurs $[r_1 ; r_2]$ et extérieurs $[r_3 ; r_4]$.

Considérons tout d'abord la couronne intérieure $r \in [r_1 ; r_2]$. La solution (14)Bis injectée dans l'équation (13) permet d'établir un système de deux équations dont les inconnues sont les constantes d'intégration J_0 et J_1 , et dont le terme de droite correspond aux conditions aux limites :

$$\begin{aligned} J_0 \frac{\sqrt{2}}{\delta p} (Br'(\Delta r_1) + jBi'(\Delta r_1)) + J_1 \frac{\sqrt{2}}{\delta p} (Kr'(\Delta r_1) + jKi'(\Delta r_1)) &= 0 \\ J_0 \frac{\sqrt{2}}{\delta p} (Br'(\Delta r_2) + jBi'(\Delta r_2)) + J_1 \frac{\sqrt{2}}{\delta p} (Kr'(\Delta r_2) + jKi'(\Delta r_2)) &= j\sigma\mu\omega \frac{NI}{2\pi r_2} \end{aligned}$$

La résolution de ce système permet d'établir les expressions des densités de courant (cf. **Annexe 2**).

c) *Expression de la densité de courant pour un modèle à plusieurs couches*

Nous allons nous intéresser à l'expression de la densité de courant d'une couronne conductrice située entre deux couronnes.

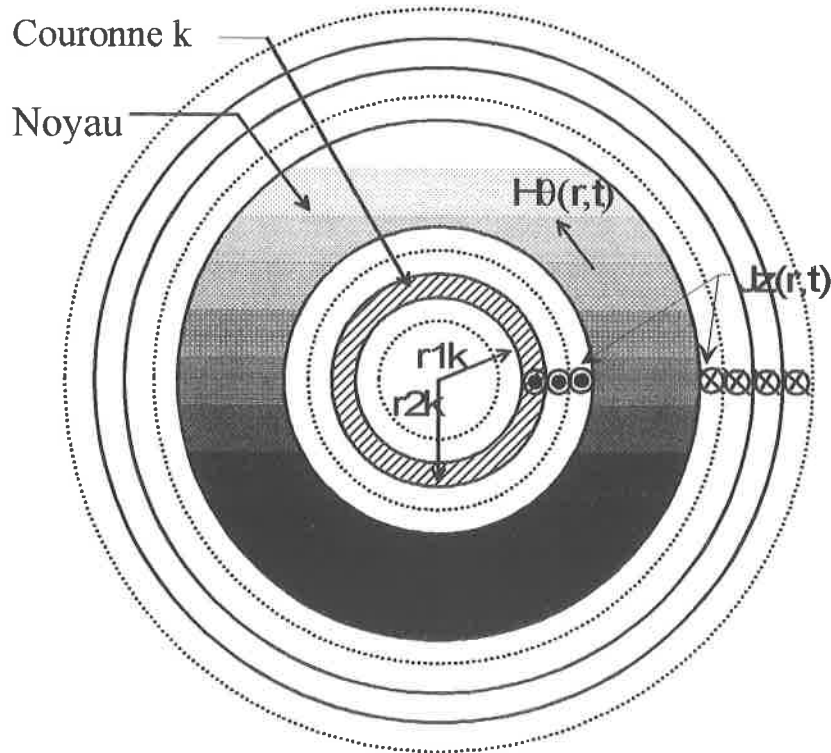


Figure 6 : Représentation d'inductance à plusieurs couches dont la couronne k (hachurée).

Considérons la couronne intérieure k (cf. Figure 6) comprenant N_{ik} conducteurs situés entre les rayons r_{1k} et r_{2k} , vérifiant : $r_{2k} - r_{1k} = dc$.

Soit $N_{i_{rest}}$ le nombre de conducteurs dans les couronnes en deçà du rayon r_{1k} . Les conditions aux limites de la couronne étudiée s'expriment :

$$\text{pour } r=r_{1k} : H(r_{1k}) = \frac{N_{i_{rest}} I}{2\pi r_{1k}},$$

$$\text{pour } r=r_{2k} : H(r_{2k}) = \frac{(N_{i_{rest}} + N_{ik}) I}{2\pi r_{2k}}.$$

La solution donnée par l'équation (14) Bis, doit être injectée dans l'équation (13), pour chacune des limites de la couronne. Nous en déduisons les constantes J_{0k} et J_{1k} , qui permettent d'exprimer la densité de courant dans la couronne k. En effet, ces constantes sont solutions du système :

$$J_{0k} \frac{\sqrt{2}}{\delta_{pk}} (Br'(\Delta r_{1k}) + jBi'(\Delta r_{1k})) + J_{1k} \frac{\sqrt{2}}{\delta_{pk}} (Kr'(\Delta r_{1k}) + jKi'(\Delta r_{1k})) = j\sigma_k \mu \omega \frac{N_{i_{rest}} I}{2\pi r_{1k}}$$

$$J_{0k} \frac{\sqrt{2}}{\delta_{pk}} (Br'(\Delta r_{2k}) + jBi'(\Delta r_{2k})) + J_{1k} \frac{\sqrt{2}}{\delta_{pk}} (Kr'(\Delta r_{2k}) + jKi'(\Delta r_{2k})) = j\sigma_k \mu \omega \frac{(N_{i_{rest}} + N_{ik}) I}{2\pi r_{2k}}$$

CHAPITRE I

Où σ_k et δ_{pk} représentent respectivement la conductivité apparente équivalente et l'épaisseur de peau pour la couronne k . L'expression de la densité de courant dans la couronne intérieure k , et dans la couronne extérieure k , sont détaillées en **Annexe 3**.

Intéressons nous maintenant au problème purement géométrique qui consiste à déterminer le nombre de couronnes et de conducteurs par couronne, équivalents à un bobinage comprenant N conducteurs. Plusieurs solutions à ce problème sont envisageables avec des degrés de complexités divers. Nous proposons d'utiliser le nombre de spires initial, de calculer le nombre de spires pouvant être répartis dans la première couronne. On passe à la couronne suivante en ôtant au nombre de spires initial le nombre de spires logées dans la première couronne, l'opération est répétée jusqu'à ce que toutes les spires soient placées. De manière synthétique l'organigramme de la **Figure 7** expose le déroulement du calcul.

Cet organigramme vient s'insérer dans la routine d'optimisation et permet, lors de l'itération courante, de calculer les pertes Joule en alternatif pour l'ensemble des conducteurs. L'évaluation des pertes est immédiate grâce à l'effort de modélisation analytique qui a été fourni tandis qu'avec un calcul par éléments finis cette évaluation prendrait de nombreuses minutes. Les pertes en alternatif sont fortement influencées par le nombre de couches et avec seulement 3 couches à 100kHz, les pertes dans la première couche sont multipliées d'un facteur 10 relativement à celles calculées pour un bobinage qui ne comporterait qu'une seule couche.

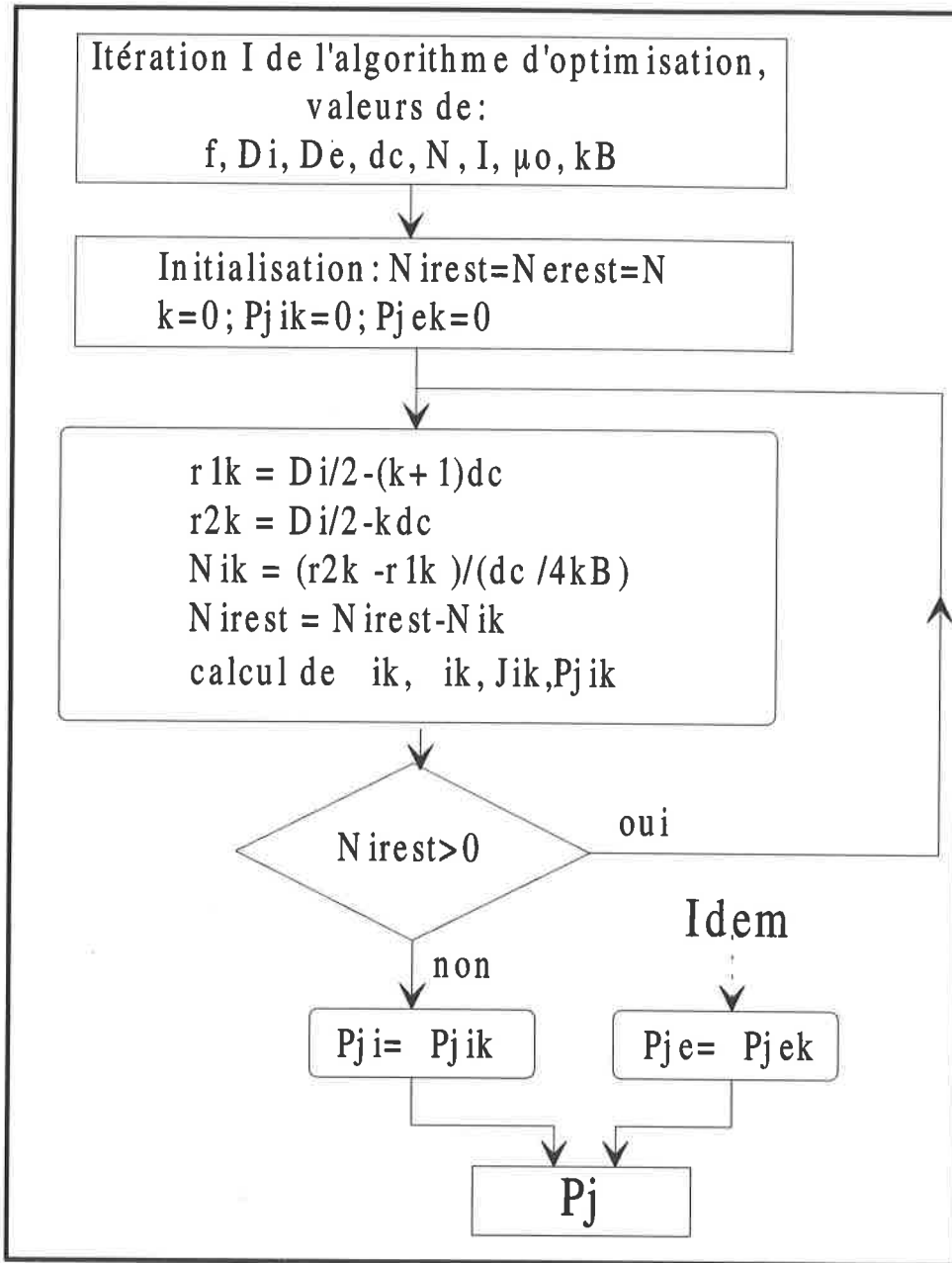


Figure 7 : Organigramme de calcul des pertes joules par couche de bobinage.

d) Calcul des pertes Joules dans les conducteurs

Après avoir calculé la répartition de courant, il faut déterminer les pertes Joule qui en résultent. Nous nous intéresserons à la couronne intérieure, mais l'expression obtenue est directement transposable aux conducteurs extérieurs ainsi qu'à une couronne quelconque (k) située dans un bobinage à plusieurs couches. Pour cela, nous utilisons l'expression générale :

$$P_j = \iiint \rho_{JJ}^* dV \quad (16)$$

CHAPITRE I

En raison de la symétrie du problème, le calcul des pertes peut se simplifier en choisissant pour élément de volume dV , situé à une distance r du centre, un cylindre de longueur lc , d'épaisseur dr soit $dV = 2\pi r dr lc$, (16) devient :

$$P_j = 2\pi lc \rho \left[\int_{r_1}^{r_2} r J(\Delta r) J(\Delta r)^* dr + \int_{r_3}^{r_4} r J(\Delta r) J(\Delta r)^* dr \right]$$

A présent, intéressons nous au calcul de l'intégrale sur les conducteurs intérieurs (soit P_{jint} de r_1 à r_2) qui utilise l'expression de la densité de courant (équation (14)Bis). Nous considérerons les pertes par unités de longueur. Afin d'alléger la présentation nous décomposerons le calcul de l'intégrale en somme de 4 intégrales :

$$P_{jint} = 2\pi \rho \left[J_0 J_0^* \int_{r_1}^{r_2} r B_0(k_1 \Delta r) B_0(k_2 \Delta r) dr + J_1 J_1^* \int_{r_1}^{r_2} r K_0(k_3 \Delta r) K_0(k_4 \Delta r) dr \right] \quad (17)$$

$$+ 2\pi \rho \left[J_0 J_1^* \int_{r_1}^{r_2} r B_0(k_1 \Delta r) K_0(k_4 \Delta r) dr + J_1 J_0^* \int_{r_1}^{r_2} r B_0(k_2 \Delta r) K_0(k_3 \Delta r) dr \right]$$

Avec :

$$k_1 = j^{3/2} \sqrt{\sigma \mu \omega}; \quad k_2 = k_1^* = j^{-3/2} \sqrt{\sigma \mu \omega}; \quad k_3 = j^{1/2} \sqrt{\sigma \mu \omega}; \quad k_4 = k_3^* = j^{-1/2} \sqrt{\sigma \mu \omega}$$

Ce type d'intégrale est qualifié d'intégrale de Lommel. Elles admettent une solution connue [8] lorsque les coefficients vérifient $k_i \neq \pm k_j$:

$$\int_0^x r B_0(k_1 r) B_0(k_2 r) dr = \left[\frac{r}{k_1^2 - k_2^2} \left[B_0(k_1 r) \frac{\partial B_0(k_2 r)}{\partial r} - B_0(k_2 r) \frac{\partial B_0(k_1 r)}{\partial r} \right] \right]_0^x \quad (18)$$

Or, nous pouvons noter que l'inégalité $k_i \neq \pm k_j$, justifiant le résultat des intégrales de Lommel, est vérifiée entre k_1 et k_2 ainsi qu'entre k_3 et k_4 (ceci correspond aux 2 premières intégrales de l'expression de P_{jint}) mais ne l'est pas entre k_2 et k_3 ainsi qu'entre k_1 et k_4 (soit les 2 dernières intégrales de l'expression de P_{jint}). Dans ce dernier cas, le résultat de l'intégrale reste à établir.

CHAPITRE I

Soit à calculer :

$$\int_0^x r B_0(k_2 r) K_0(k_3 r) dr \quad (19)$$

Pour cela nous nous inspirerons de la démonstration qui permet de retrouver la solution des intégrales de Lommel. Tout d'abord, notons que tandis que les fonctions de Bessel sont solutions de (12), les fonctions conjuguées de celles ci sont solutions de :

$$\frac{\partial^2 J(r)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial J(r)}{\partial r} + j\sigma\mu\omega J(r) = 0 \quad (20)$$

C'est le cas des fonctions :

$$B_0(k_2 r) \text{ et } K_0(k_3 r)$$

Considérons l'intégrale à calculer (19). Les fonctions sur lesquelles portent l'intégrale sont : $B_0(k_2 r)$ et $K_0(k_3 r)$ respectivement solutions de (12) et (20). Nous pouvons ainsi écrire le système suivant :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 B_0(k_2 r)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial B_0(k_2 r)}{\partial r} + j\sigma\mu\omega B_0(k_2 r) &= 0 \\ \frac{\partial^2 K_0(k_3 r)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial K_0(k_3 r)}{\partial r} - j\sigma\mu\omega K_0(k_3 r) &= 0 \end{aligned}$$

Puis en multipliant la première équation par $rK_0(k_3 r)$ et la seconde par $rB_0(k_2 r)$, il vient :

$$\begin{aligned} rK_0(k_3 r) \frac{\partial^2 B_0(k_2 r)}{\partial r^2} + K_0(k_3 r) \frac{\partial B_0(k_2 r)}{\partial r} + j\sigma\mu\omega r B_0(k_2 r) K_0(k_3 r) &= 0 \\ rB_0(k_2 r) \frac{\partial^2 K_0(k_3 r)}{\partial r^2} + B_0(k_2 r) \frac{\partial K_0(k_3 r)}{\partial r} - j\sigma\mu\omega r B_0(k_2 r) K_0(k_3 r) &= 0 \end{aligned}$$

Par soustraction de ces deux équations on obtient :

$$- 2 j \sigma \mu \omega r B_o(k_2 r) K_o(k_3 r) =$$

$$r K_o(k_3 r) \frac{\partial^2 B_o(k_2 r)}{\partial r^2} - r B_o(k_2 r) \frac{\partial^2 K_o(k_3 r)}{\partial r^2} + K_o(k_3 r) \frac{\partial B_o(k_2 r)}{\partial r} - B_o(k_2 r) \frac{\partial K_o(k_3 r)}{\partial r}$$

Dont on déduit :

$$- 2 j \sigma \mu \omega r B_o(k_2 r) K_o(k_3 r) = \frac{\partial r \left(K_o(k_3 r) \frac{\partial B_o(k_2 r)}{\partial r} - B_o(k_2 r) \frac{\partial K_o(k_3 r)}{\partial r} \right)}{\partial r}$$

C'est ainsi qu'il en découle :

$$\int_0^x r B_o(k_2 r) K_o(k_3 r) dr = \left[j \frac{r}{2 \sigma \mu \omega} \left(K_o(k_3 r) \frac{\partial B_o(k_2 r)}{\partial r} - B_o(k_2 r) \frac{\partial K_o(k_3 r)}{\partial r} \right) \right]_0^x \quad (21)$$

De la même manière nous obtenons pour l'intégrale qui porte sur les fonctions $B_o(k_1 r)$ et $K_o(k_4 r)$:

$$\int_0^x r B_o(k_1 r) K_o(k_4 r) dr = \left[j \frac{r}{2 \sigma \mu \omega} \left(B_o(k_1 r) \frac{\partial K_o(k_4 r)}{\partial r} - K_o(k_4 r) \frac{\partial B_o(k_1 r)}{\partial r} \right) \right]_0^x \quad (22)$$

Nous pouvons désormais établir l'expression des pertes Joules pour la couronne intérieure à partir des solutions des intégrales proposées équations (18), (21) et (22). En outre, selon la couronne considérée : couronne intérieure, extérieure, ou couronne (k) pour un modèle à plusieurs couches, il suffit de remplacer les termes J_o et J_1 par leurs expressions.

$$\begin{aligned}
 P_{jint} = & \\
 & 2\pi\rho J_o J_o^* \left[\frac{r}{k_1^2 - k_2^2} (Bo(\Delta r j^{3/2}) \frac{\partial Bo(\Delta r j^{-3/2})}{\partial r} - Bo(\Delta r j^{-3/2}) \frac{\partial Bo(\Delta r j^{3/2})}{\partial r}) \right]_{r_1}^{r_2} \\
 & + 2\pi\rho J_1 J_1^* \left[\frac{r}{k_3^2 - k_4^2} (Ko(\Delta r j^{1/2}) \frac{\partial Ko(\Delta r j^{-1/2})}{\partial r} - Ko(\Delta r j^{-1/2}) \frac{\partial Ko(\Delta r j^{1/2})}{\partial r}) \right]_{r_1}^{r_2} \\
 & + \pi\rho J_1 J_o^* \left[j \frac{r}{\sigma\mu\omega} \left(Ko(\Delta r j^{1/2}) \frac{\partial Bo(\Delta r j^{-3/2})}{\partial r} - Bo(\Delta r j^{-3/2}) \frac{\partial Ko(\Delta r j^{1/2})}{\partial r} \right) \right]_{r_1}^{r_2} \\
 & + \pi\rho J_o J_1^* \left[j \frac{r}{\sigma\mu\omega} \left(Bo(\Delta r j^{3/2}) \frac{\partial Ko(\Delta r j^{-1/2})}{\partial r} - Ko(\Delta r j^{-1/2}) \frac{\partial Bo(\Delta r j^{3/2})}{\partial r} \right) \right]_{r_1}^{r_2}
 \end{aligned} \tag{23}$$

1. Cette expression s'écrit de façon plus simple, si on utilise les fonctions de Kelvin, qui rappelons le, sont les parties réelles et imaginaires des fonctions de Bessel et si nous négligeons d'écrire la variable Δr :

$$\begin{aligned}
 P_{jint} = & \\
 & \sqrt{2}\pi\rho\delta p \left[J_o J_o^* [r(BrBi' - BiBr')] \right]_{r_1}^{r_2} + J_1 J_1^* [r(KiKr' - KrKi')] \right]_{r_1}^{r_2} \\
 & + \sqrt{2}\pi\rho\delta p \left[r \operatorname{Im}(J_o J_1^*) (Br'Kr + Bi'Ki - BrKr' - BiKi') \right]_{r_1}^{r_2} \\
 & \left[+ r \operatorname{Re}(J_o J_1^*) (BrK + Bi'Kr - BiKr' - Br'Ki) \right]_{r_1}^{r_2}
 \end{aligned} \tag{24}$$

Ce calcul terminé il est grand temps de justifier son intérêt. Afin d'appréhender l'impact de la fréquence sur les pertes dans les conducteurs, lors d'une procédure de dimensionnement, on peut au choix :

- effectuer une simulation 2D,
- procéder à l'intégration numérique de l'équation (17),
- effectuer une simple application numérique de l'équation (24).

Or, tels qu'ils sont présentés ci-dessus ces différentes choix sont également ordonnés du plus coûteux en temps de calcul au plus économique avec un rapport d'environ 10^4 entre les extrêmes. Il va s'en dire que dans une procédure de dimensionnement numérique qui nécessiterait de multiples évaluations, la dernière solution est particulièrement intéressante.

CHAPITRE I

Revenons au résultat (24). Cette expression peut d'emblée sembler plus rassurante puisqu'il est évident que tous les termes sont des réels. En effet, nous vous invitons à noter qu'il est mal aisé d'affirmer que le résultat de l'intégrale est réel à partir de l'expression (23).

La même expression est valable pour les pertes par unités de longueur dans la couronne extérieure (notées P_{jext}) en substituant dans (24) l'expression de la densité de courant à l'extérieur (cf. **Annexe 2**) ainsi qu'en y substituant r_1 et r_2 respectivement par r_3 et r_4 .

A partir des expressions des coefficients des densités de courant (cf. **Annexe 2** pour une couche et **Annexe 3** pour N couches) ainsi que les différentes expressions des fonctions de Bessel et de leur dérivée, nous possédons un modèle analytique de l'évolution des pertes en fonction de la fréquence et de la géométrie. Intéressons nous à sa validité à travers une confrontation aux résultats de simulation puis à des mesures.

3. simulation 2D

Nous avons vu qu'il n'était pas possible de calculer analytiquement la densité de courant en alternatif puis les pertes dans les conducteurs sans simplifier la géométrie de l'inductance à noyau torique. Mais nous pouvons, dans le cas d'une simulation 2D, observer le comportement en alternatif des courants dans les conducteurs, avec des simplifications moindres. Cette étude nous permet de valider le calcul précédent des pertes par effet Joule. Nous utilisons donc un logiciel de calcul des champs électromagnétiques par éléments finis : MAXWELL 2D ([6]). Le logiciel comporte plusieurs modules. Pour un problème donné nous utilisons une combinaison de deux modules parmi ceux proposés avec toujours le meilleur puis un solveur selon le type de problème à résoudre (magnétostatique cf. [9] et [10], magnétodynamique, électrostatique et électrodynamique avec différentes symétries axiale ou de révolution).

a) *Le mailleur*

Le mailleur (Mesh32) permet de saisir la géométrie 2D du composant. Nous conservons le plan de coupe précédent, et nous pouvons décrire les conducteurs tels qu'il sont, c'est à dire au nombre de N et ronds, puis d'effectuer un maillage triangulaire. Le maillage est effectué automatiquement dans un premier temps, puis peut être affiné soit manuellement en des points sensibles, soit automatiquement à partir du résultat d'erreur fournit par le solveur.

CHAPITRE I

b) *Le solveur*

Le solveur utilisé, "eddy 32", est particulièrement adapté au calcul de la répartition de courant en alternatif. Le problème considéré doit être à géométrie axiale, un autre module est davantage adapté aux problèmes comprenant une symétrie de révolution. A partir du maillage, des caractéristiques des matériaux et de la fréquence le résolveur détermine en tous noeuds du maillage le potentiel vecteur \vec{A} . Le résultat de ces simulations peut ensuite être utilisé pour calculer la répartition du courant puis les pertes dans les conducteurs.

c) *Description du composant*

L'inductance est assimilée à un cylindre creux de longueur infinie comprenant N conducteurs intérieurs et N conducteurs extérieurs. La géométrie saisie pour la simulation sous MAXWELL 2D est représentée à la **Figure 8**, on y retrouve des conducteurs ronds à l'intérieur et à l'extérieur du noyau, lequel est représenté par un anneau foncé. L'objet expérimental ne comporte qu'une couche de conducteurs. Sa géométrie est décrite (en 3D) par la **Figure 3**, ses dimensions géométriques sont celles du Tableau 1.

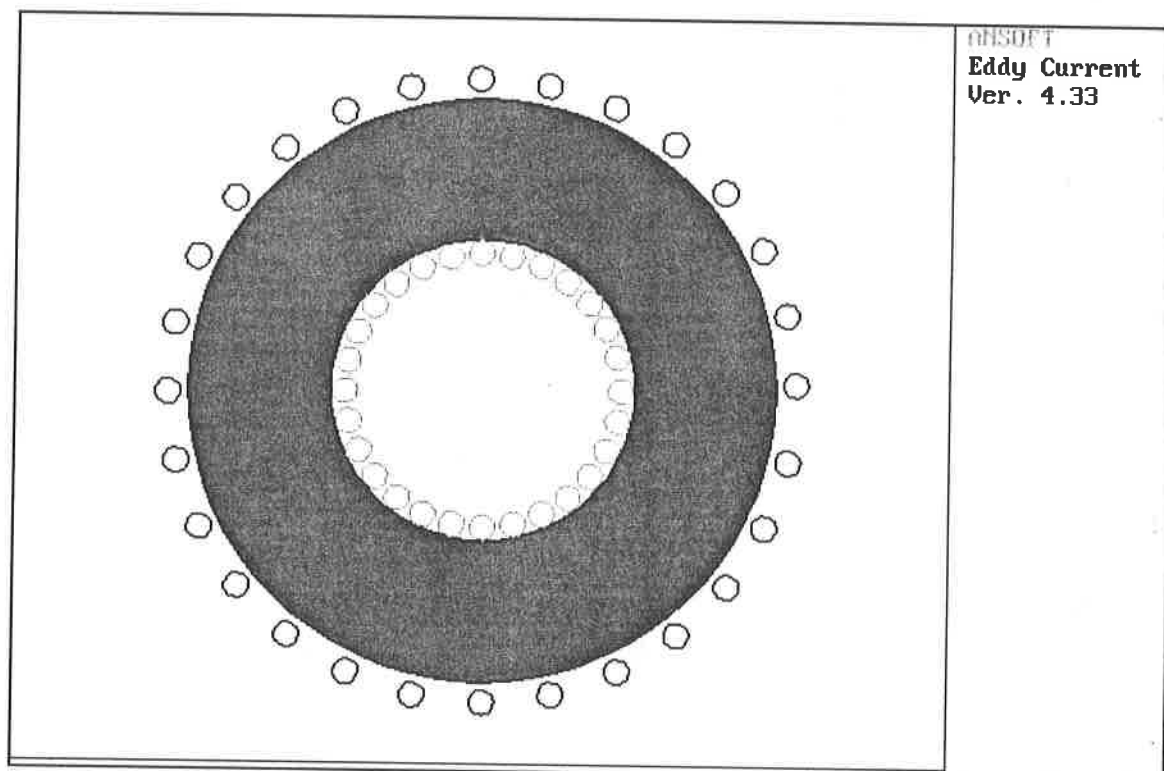


Figure 8 : Géométrie 2D de l'inductance à noyau torique pour la simulation.

d) *Maillage et résultats de simulation préliminaire*

Le maillage a été réalisé à partir d'un maillage initial et de plusieurs affinages successifs de façon à réduire l'erreur de la simulation. La figure comprenant le maillage est représentée ci dessous :

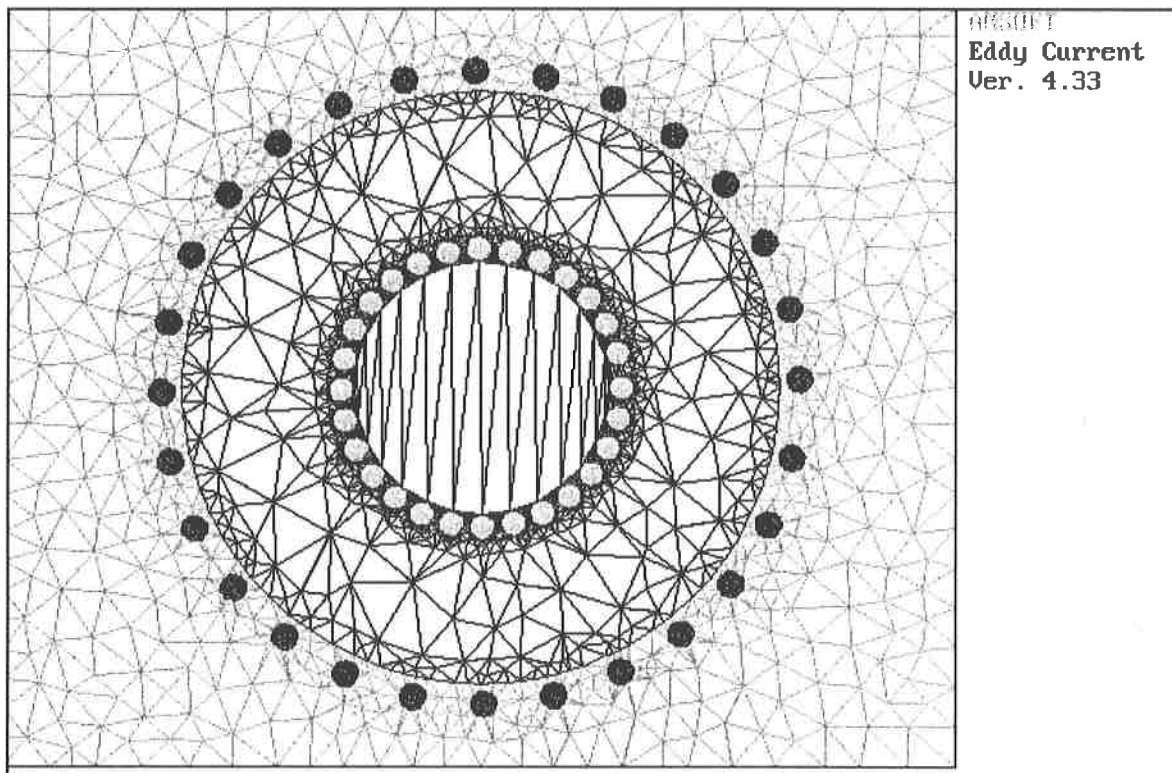


Figure 9 : *Résultat du maillage auto-adaptatif par MAXWELL 2D.*

Les zones dans lesquelles le maillage est affiné présente une forte concentration de triangles. Ces zones sont les conducteurs ainsi que la périphérie des conducteurs. La finesse du maillage résulte d'un dilemme classique entre la précision et la rapidité de la simulation. Un premier résultat de la partie réelle de la densité de courant dans les conducteurs intérieurs au tore à 100kHz sur la **Figure 10**, montre que l'essentiel du courant passe dans moins d'un quart du diamètre.

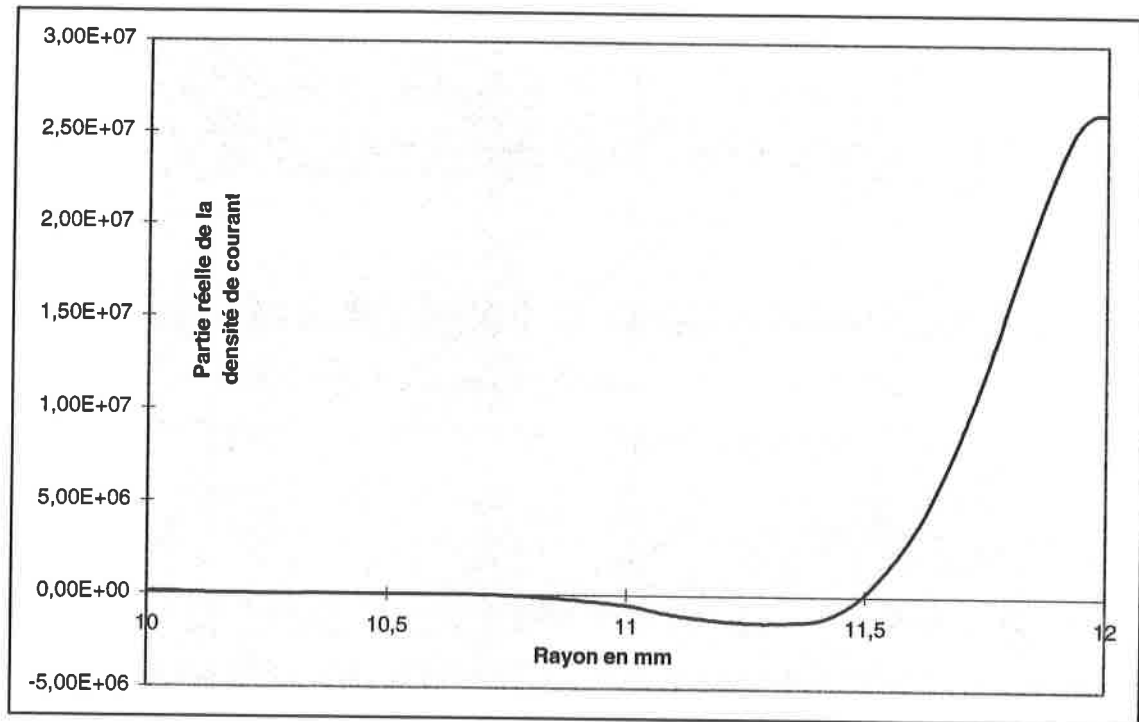


Figure 10 : Partie réelle de la densité de courant dans les conducteurs de 10mm à 12mm.

Nous pouvons d'ores et déjà constater l'analogie entre l'allure de la partie réelle de la densité de courant obtenue par simulation (cf. Figure 10) et l'allure de celle-ci obtenue par le calcul de $J(r)$ (cf. Figure 11). Notons, à allure égale, une différence entre les amplitudes qui provient de la différence entre les surfaces de passage du courant électrique, pour une même intensité.

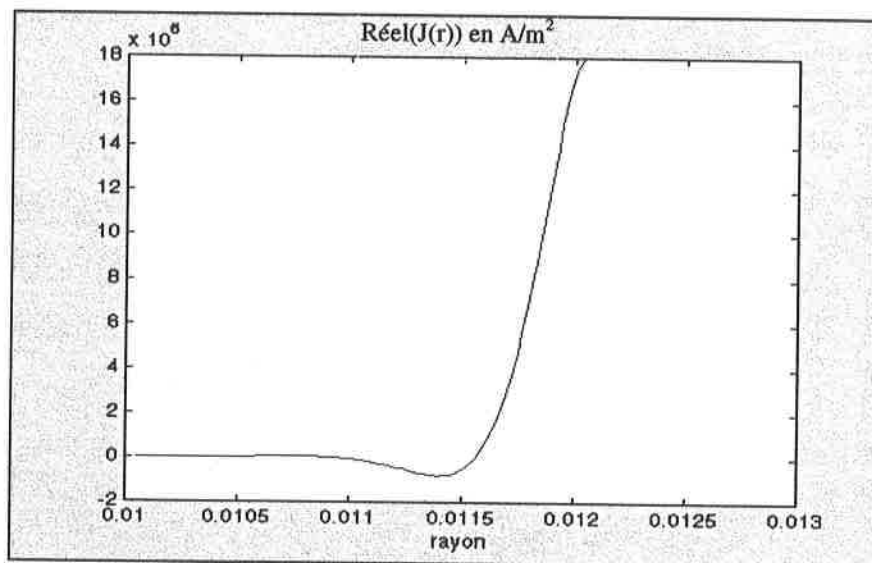


Figure 11 : Représentation de la partie réelle de la densité de courant calculée dans la couronne intérieure de 10mm à 12mm.

CHAPITRE I

Quant au module de la densité de courant, il est représenté sur la **Figure 12** pour une fréquence de 100kHz et superposé à la densité de courant en continu.

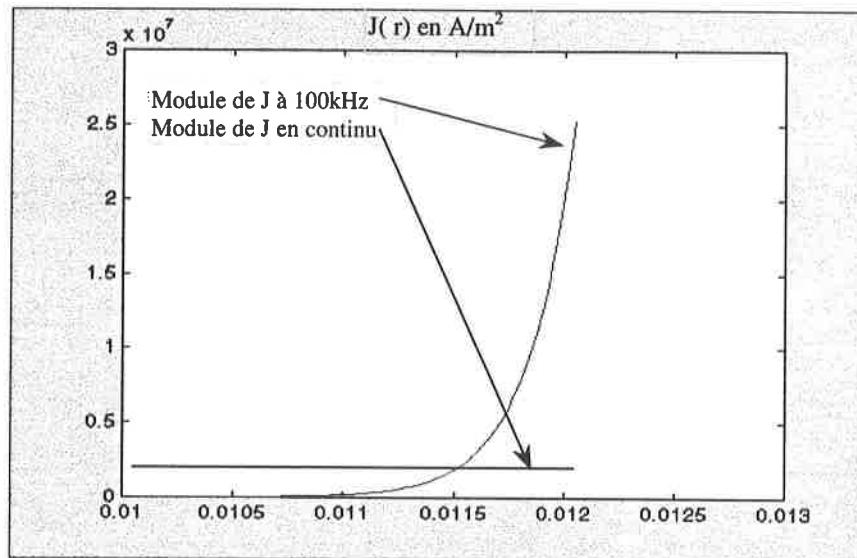


Figure 12 : *Module de la densité de courant à 100kHz et en continu.*

Nous allons maintenant nous intéresser à la comparaison entre les résultats établis par simulation, ceux obtenus par le calcul analytique, ainsi qu'à des mesures.

4. Confrontation entre : modélisation - simulation - expérimentation

a) Contexte

Commençons par préciser le contexte des calculs et des simulations. Tout d'abord l'épaisseur des couronnes qui sert de base au calcul analytique a été choisie égale au diamètre des conducteurs. Ainsi qu'il est préconisé dans [7], l'épaisseur des couronnes a été choisie égale au diamètre des conducteurs et une résistivité apparente doit être calculée pour compenser la différence de surface de passage du courant électrique. Nous adoptons pour la couronne intérieure et extérieure respectivement de résistivité apparente ρ_i et ρ_e :

$$\rho_i = \rho \frac{r_2^2 - r_1^2}{N (dc^2/4)}$$

$$\rho_e = \rho \frac{r_4^2 - r_3^2}{N (dc^2/4)}$$

CHAPITRE I

La valeur du courant importe peu pour la comparaison, néanmoins nous avons simulé pour un courant d'intensité efficace $I = 10 / \sqrt{2}$ A.

Quant aux mesures, elles ont été effectuées à l'aide d'un analyseur d'impédance HP4194A. La résistance des conducteurs est de faible valeur, la mesure requiert donc une excellente précision. Celle-ci a été obtenue grâce à une mesure 4 fils (Kelvin) qui a été mise au point au LEM pour caractériser l'impédance de condensateurs [11]. La mesure combine une mesure de tension et une mesure de courant sur le composant permettant de s'exonérer des résistances parasites des connexions.

Le composant sur lequel ont porté les mesures est l'équivalent du bobinage de l'inductance autour du noyau torique, mais dont le noyau a été extrait **uniquement pour la validation du modèle des pertes Joule** de manière à conserver les dimensions géométriques. Cette séparation physique du bobinage permet **une séparation des pertes**. En effet, l'imprécision de la modélisation des pertes fer ne permettraient pas d'extraire les pertes Joule à partir de mesures sur le composant avec son noyau. Par ailleurs, sur d'autres géométries cette extraction modifierait la nature du problème du fait de l'épanouissement des lignes de champ. En revanche la forme "naturelle" des lignes de champ d'un bobinage torique sont des cercles. Aussi, les valeurs du champ d'excitation sur les parois, qui conditionnent les pertes Joule, ne seront guère affectées.

b) Résultats

Nous commencerons par aborder séparément les couronnes intérieures et extérieures, qui se prêtent à une comparaison entre le calcul analytique et la simulation 2D. Puis, une comparaison entre le calcul analytique, la simulation 2D et des mesures sera présentée pour l'ensemble des conducteurs. Les pertes Joule tant calculées que simulées sont ramenées à la longueur. Pour les conducteurs intérieurs, les pertes Joule calculées et simulées, représentées **Figure 13**, montrent une bonne concordance. Concernant une simplification éventuelle de l'équation (24), notons que, pour de faibles fréquences, les termes ont tous une importance égale. Mais, lorsque la fréquence augmente, seul le résultat de la première intégrale a un effet significatif lequel correspond au résultat classique obtenu pour un rayon intérieur nul (d'après [7]).

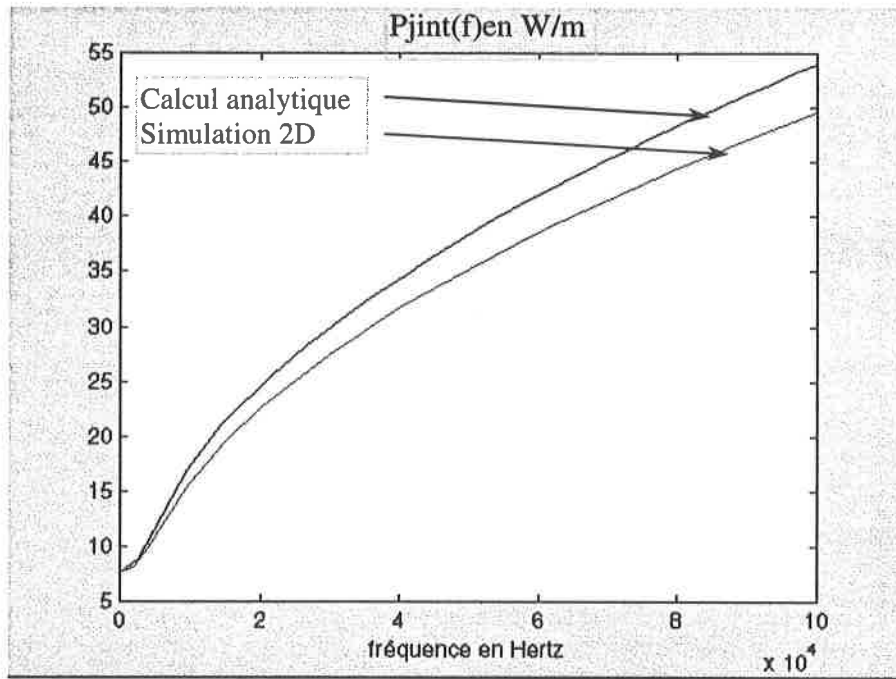


Figure 13 : *Évolution des pertes Joules dans les conducteurs intérieurs en fonction de la fréquence : calcul et simulation.*

Pour les conducteurs situés à l'extérieur les pertes calculées et simulées, représentées **Figure 14**, présentent une concordance moins bonne que pour l'intérieur certes, mais cela reste toutefois satisfaisant. En revanche, les allures des deux courbes sont parfaitement semblables. Le pessimisme de notre calcul peut provenir d'un effet de proximité surestimé puisque les conducteurs forment une couronne, tandis que les conducteurs réels disposés à l'extérieur sont en fait éloignés entre eux. Notez qu'à l'intérieur les conducteurs sont quasiment jointifs (voir **Figure 8**).

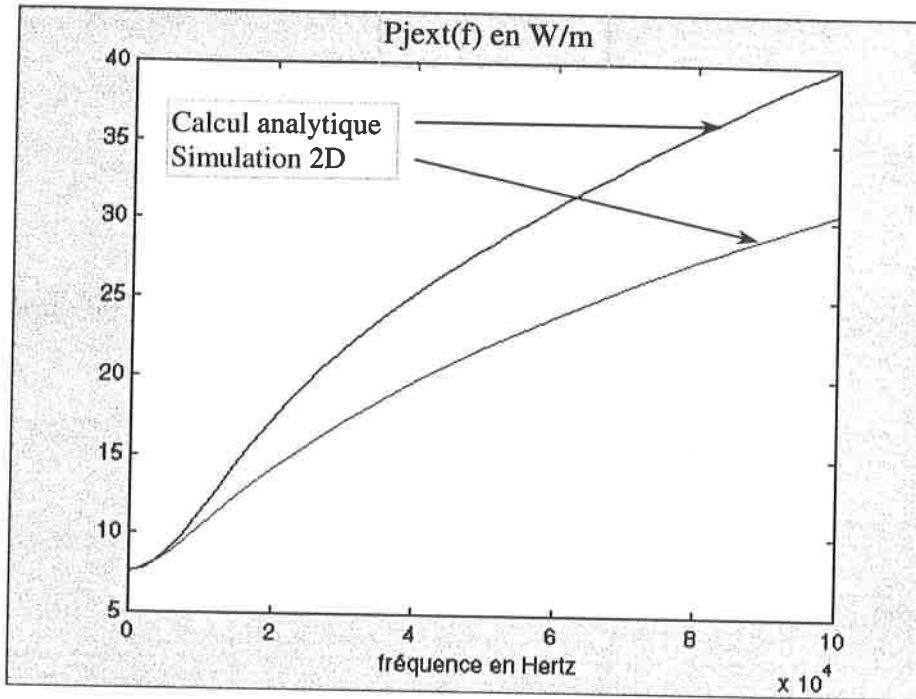


Figure 14 : *Évolution des pertes Joule dans les conducteurs extérieurs en fonction de la fréquence : calcul et simulation.*

Nous constatons une différence entre les pertes pour les conducteurs situés à l'intérieur et ceux situés à l'extérieur du noyau. Ceci est dû au fait que l'amplitude du champ a une forte incidence sur la valeur des pertes tant simulées que calculées. En effet, tandis qu'à l'intérieur l'amplitude du champ est :

$$H(r_2) = \frac{NI}{2\pi r_2},$$

à l'extérieur cette amplitude n'est plus que :

$$H(r_3) = \frac{NI}{2\pi r_3}.$$

Ainsi, $H(r_2) > H(r_3)$, et cette amplitude, qui intervient directement dans l'expression de la densité de courant, influe sur le calcul des pertes à fréquences élevées. Une simulation 3D permettrait sans doute de constater une diminution des pertes le long des conducteurs reliant les conducteurs intérieurs et extérieurs, c'est à dire les conducteurs des faces supérieures et inférieures (cf. **Figure 42**). Cependant, pour modéliser la résistance de ces conducteurs, nous considérerons les pertes médianes.

Le passage des pertes à la modélisation de la résistance série s'effectue en notant que :

$$P_j = R_s I^2$$

Les pertes totales peuvent être évaluées en considérant la longueur d'une spire et les expressions des pertes joules par unités de longueur dans les couronnes intérieures (P_{jint}) et extérieures (P_{jext}) établies précédemment (24) :

$$P_j = \frac{P_{jint} + P_{jext}}{2} (De - Di + 2h + 2dc)$$

D'ou la résistance série :

$$R_s(f) = \frac{P_{jint} + P_{jext}}{2I^2} (De - Di + 2h + 2dc) \quad (25)$$

L'évolution de la résistance en fonction de la fréquence est représentée **Figure 15**. Les résultats de la simulation sont très proches des mesures et justifient le calcul des pertes médianes pour les conducteurs reliant les conducteurs extérieurs et intérieurs. Le modèle analytique présente une différence de quelques % par rapport aux deux autres tracés. Cette différence provient vraisemblablement de l'approximation qui a été faite en remplaçant les conducteurs ronds par des couronnes. Notez que pour certaines configurations de bobinage le calcul analytique est possible même en considérant des conducteurs ronds [12].

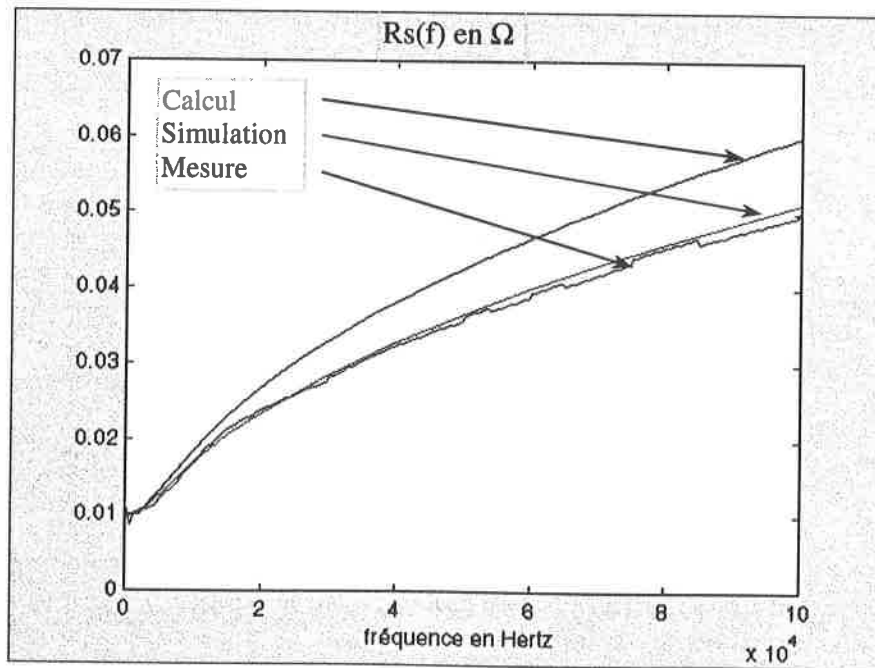


Figure 15 : Évolution de $R_s(f)$: calcul, simulation et mesure.

Par conséquent, nous nous satisferons de l'équation (24) pour modéliser les pertes dans les conducteurs en alternatif.

D. Expérimentation

Cette partie présente la mise en œuvre de **mesure d'impédance globale** et les difficultés inhérentes à l'influence du niveau d'induction sur les résultats de mesure. Nous montrons la nécessité d'effectuer des mesures dans des conditions compatibles avec celles en fonctionnement. Par ailleurs ces mesures sont l'occasion d'éprouver la validité de l'ensemble de la modélisation sur ce composant. Les mesures présentées dans cette partie portent sur le **composant complet : bobinage + noyau**.

1. Mesure des éléments R_{seq} et L_{seq} du modèle série

Nous avons utilisé un analyseur de type HP4194A, relié à un PC permettant d'exploiter les mesures. L'appareil HP4194A possède deux fonctionnalités qui sont :

- mesure d'impédance,
- mesure gain-phase d'une transmittance.

La première fonctionnalité combinée à une mesure 4 fils permet des mesures précises. Cependant, cette mesure doit être effectuée dans des conditions proches de l'utilisation, ce qui peut être obtenu en rajoutant un étage d'amplification au système de mesure gain-phase. Ces aspects seront détaillés dans ce qui va suivre.

a) *Mesure d'impédance*

L'analyseur d'impédance HP4194A permet d'obtenir une décomposition de l'impédance en R_{seq} - L_{seq} , qui représentent les éléments d'un modèle série du composant (cf. **Figure 16**).

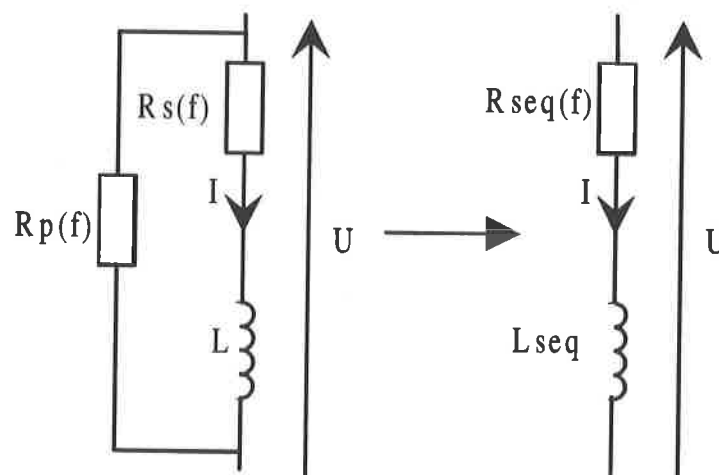


Figure 16 : Passage du modèle électrique adopté à un modèle série équivalent.

CHAPITRE I

Comme, la résistance des conducteurs est de très faible valeur pour les basses fréquences ($\approx 10\text{m}\Omega$), la mesure est fortement faussée par la connectique entre l'objet de mesure et l'appareil de mesure. De même que nous l'avons fait pour le bobinage seul nous avons utilisé une mesure 4 fils. Un exemple de caractérisation des éléments L_{seq} et R_{seq} du modèle série est présenté, respectivement **Figure 16** et **Figure 17**, sur la gamme de fréquence [100Hz-100kHz]. L'analyseur d'impédance se comporte comme une source de tension à fréquence variable d'amplitude maximale 1V, mais lorsque le courant devient important elle se comporte en source de courant, d'après [13].

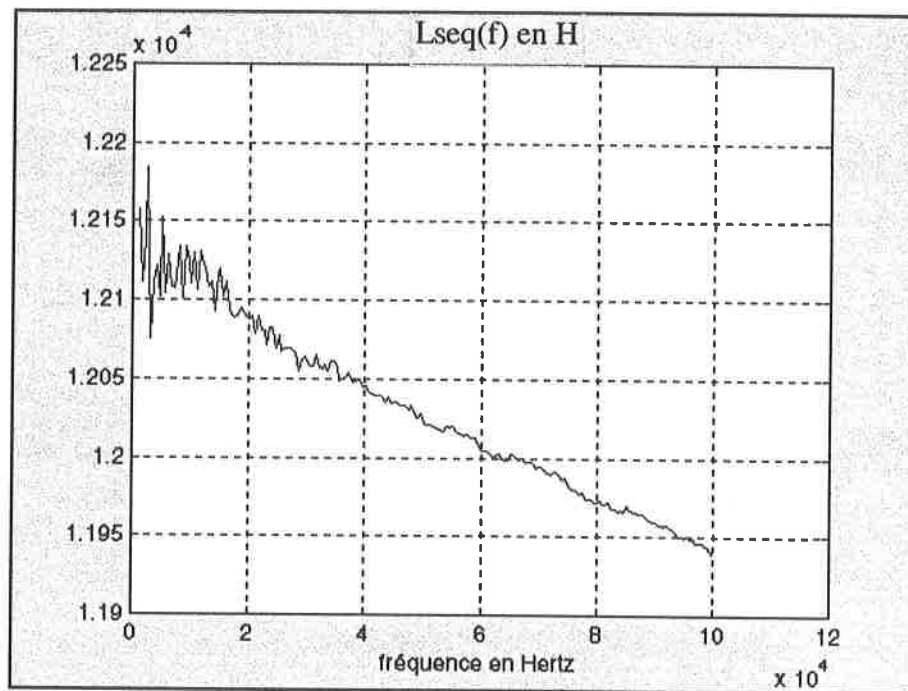


Figure 17 : Relevé de L_{seq} à l'analyseur d'impédance.

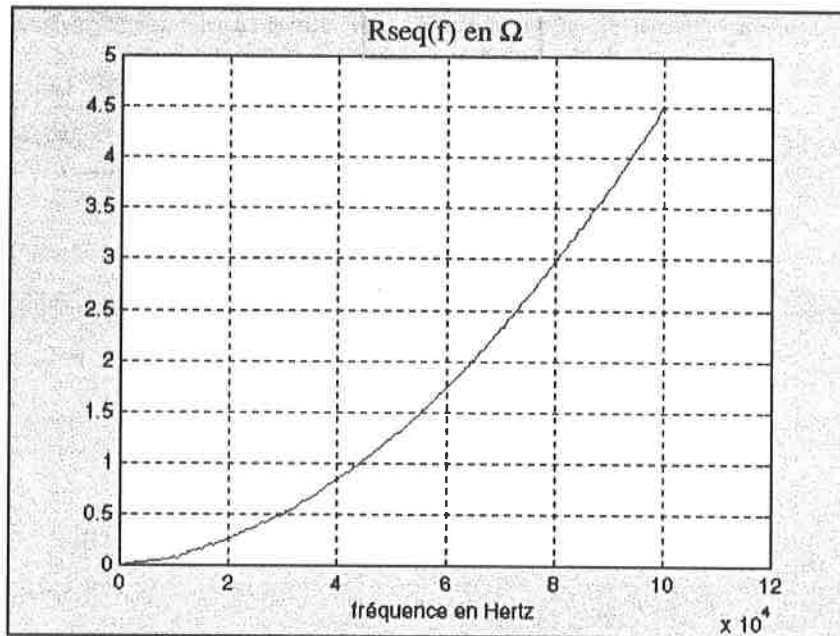


Figure 18 : Relevé de R_{seq} à l'analyseur d'impédance.

On constate une décroissance de la valeur de l'inductance relativement faible sur la gamme de fréquence tandis que la résistance augmente considérablement, toutefois comme le montre la Figure 19 la réactance du composant reste très supérieure à la résistance.

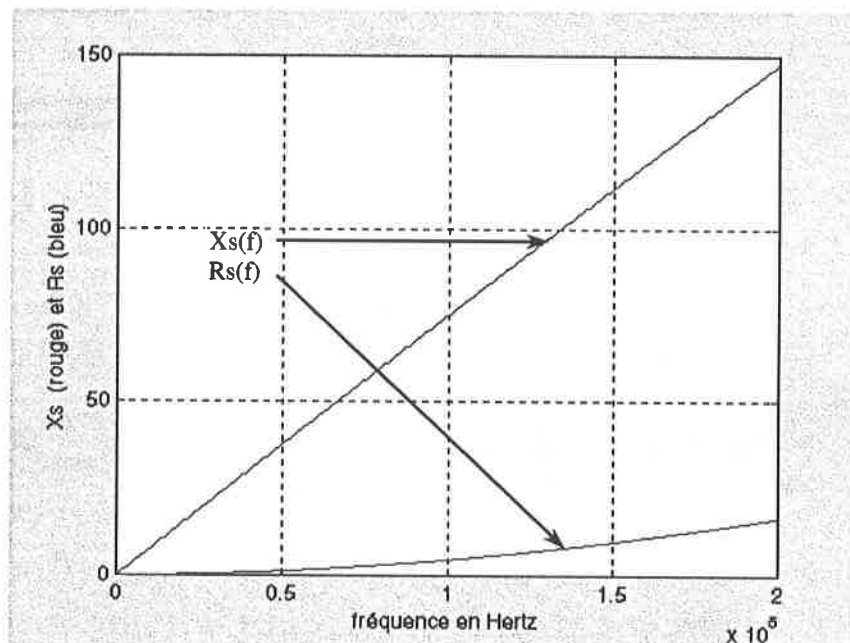


Figure 19 : Comparaison de X_{seq} et R_{seq} .

Critique de la mesure :

Ces mesures sont effectuées à partir de la sollicitation de l'oscillateur intégré à l'analyseur d'impédance, aussi le **niveau de courant est-il relativement faible**. En raison de la forte influence des conditions de mesure sur les caractéristiques du matériau magnétique (valeur du

CHAPITRE I

champ d'induction qui modifie la perméabilité : cf. Annexe 1), il est plus réaliste d'effectuer une identification des éléments R_{seq} et L_{seq} à partir d'une sollicitation permettant d'imposer la tension quel que soit le courant absorbé. Ainsi, l'induction sera connue pour chaque valeur de fréquence, tant que l'hypothèse du flux forcé par la tension restera vraie.

b) *Mesure gain-phase*

La fonctionnalité de mesure gain-phase comporte :

- un oscillateur de tension,
- une mesure de tension test,
- une mesure de tension de référence.

L'analyseur d'impédance effectue le calcul du module et de l'argument de la transmittance entre les signaux électriques de test et de référence. L'oscillateur peut être amplifié pour soumettre notre composant à des conditions de fonctionnement proches de la "gamme normale" d'utilisation. Une mesure de tension aux bornes du composant à étudier (Z_x) sert de référence, et une mesure de tension aux bornes d'un dipôle (R) dont l'impédance est connue sert de test. Ainsi, la transmittance entre les deux mesures de tension fournit l'impédance du composant (**Figure 20**).

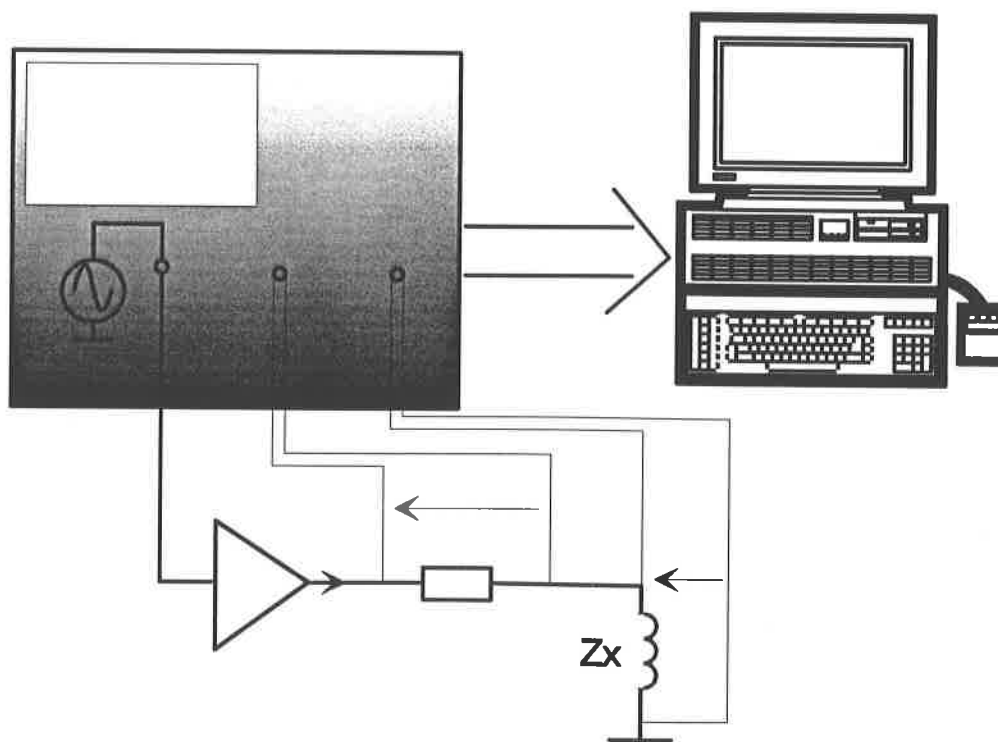


Figure 20 : Schéma de principe d'une mesure gain-phase sur des signaux amplifiés.

CHAPITRE I

Le traitement des données nous donne les valeurs des éléments du modèle équivalent, dans des conditions de fonctionnement plus réaliste. Les mesures limitées par les caractéristiques de l'amplificateur utilisé ont été effectuées dans la gamme : [1kHz, 100kHz].

La première étape de l'acquisition est de mesurer la transmittance pouvant exister entre les deux sondes, l'idéal étant d'avoir un gain et un déphasage nul entre les deux sondes. Même pour une gamme de fréquence aussi modeste que la notre, cette étape peut réserver des surprises, notamment lors de l'utilisation de sondes de courant.

L'analyseur d'impédance transmet au PC trois vecteurs contenant : la phase en degrés ($\text{Arg}(Gdb)$), le module du gain en dB (Gdb), la fréquence en Hertz (f). L'impédance de R est supposée connue. En l'occurrence elle est constante dans la gamme de fréquence envisagée. Les valeurs des éléments du schéma série se déduisent en calculant pour chaque fréquence :

- $|Z| = 10^{\frac{Gdb}{20}} R$ (module en ohms),
- $\arg(Z) = \arg(Gdb) \frac{2\pi}{360}$ (phase en radians),
- $R_{seq}(f) = |Z| \cos(\arg(Z))$,
- $L_{seq}(f) = \frac{|Z| \sin(\arg(Z))}{2\pi f}$.

Les résultats obtenus montrent des différences sensibles avec les mesures d'impédance. Tout d'abord concernant l'évolution de $L_{seq}(f)$ relevée par le traitement de la mesure gain phase (**Figure 21**), la valeur pour les faibles fréquences est bien plus élevée que celle mesurée à partir de la mesure d'impédance seule (plus du double), mais devient supérieure d'un rapport constant (environ 1.2) pour des fréquences au delà de 10kHz. En effet, lorsque le niveau d'induction dans le noyau dépasse les 2mT la perméabilité apparente augmente dans des proportions pouvant dépasser les 200%. Par ailleurs ceci justifie l'évolution de $L_{seq}(f)$ obtenue par traitement de la mesure gain phase, puisque pour de faibles fréquences, à tension imposée, le niveau d'induction sera plus élevé et par conséquent la perméabilité apparente le sera aussi.

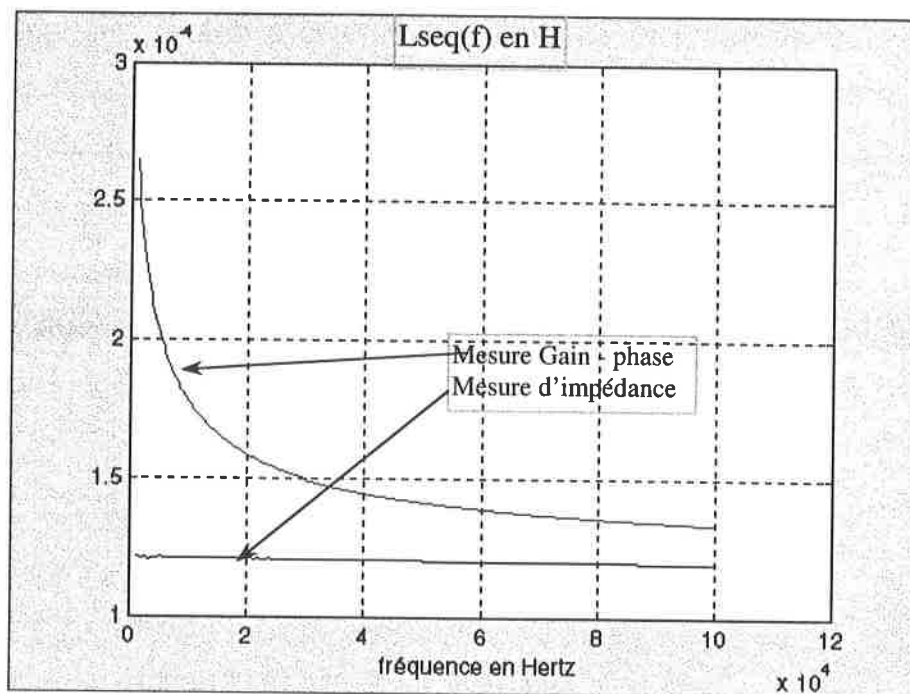


Figure 21 : $L_{seq}(f)$ par mesure d'impédance et par mesure gain-phase

Ensuite concernant le calcul de $R_{seq}(f)$ à partir de la mesure gain-phase, on constate (**Figure 22**) sur l'ensemble de la gamme de fréquence une résistance très supérieure (presque triple à 100kHz) à celle relevée par une simple mesure d'impédance. On comprend, là aussi, que le niveau d'induction y est pour quelque chose, puisque pour de faibles niveaux le cycle d'hystéresis parcouru est quasiment linéaire, son aire est donc petite devant celle parcourue à même fréquence lorsque le niveau d'induction est plus important. Ceci se traduit par des pertes plus importantes à induction élevée, ce qui correspond à une résistance série plus élevée.

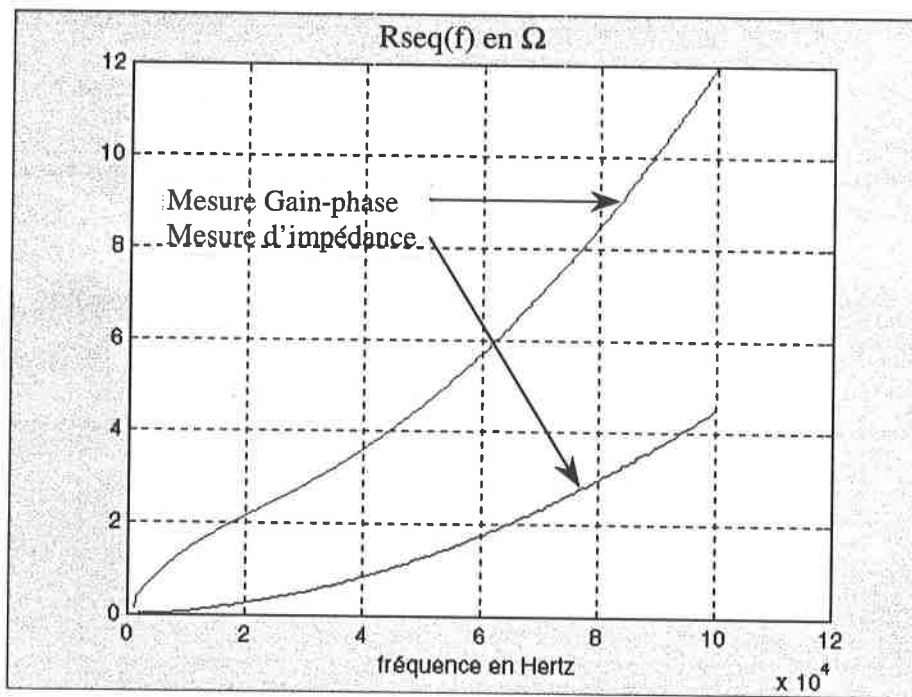


Figure 22 : $R_{seq}(f)$ par mesure gain-phase et $R_{seq}(f)$ par mesure d'impédance.

Il apparaît ainsi nécessaire d'intégrer à la modélisation les informations communiquées par le constructeur à propos des variations des paramètres en particulier la perméabilité vis à vis de l'induction. L'hypothèse de matériaux linéaire est fortement insuffisante pour la modélisation et l'est à fortiori pour le dimensionnement.

2. Confrontation entre le calcul et la mesure des éléments R_{seq} - L_{seq} du modèle série

Tout d'abord, concernant le calcul analytique des éléments R_{seq} et L_{seq} , il requiert :

- l'expression de la résistance des conducteurs en alternatif (R_s) proposée équation (25),
- l'expression de la résistance modélisant les pertes fer (R_p) présentée équation (6) (nous rappelons qu'elle est déduite de l'expression empirique des pertes fer proposée par le constructeur et que celle ci n'est fiable qu'à $\pm 15\%$),
- l'expression du coefficient d'auto-induction (L) que nous avons explicité en fonction des données fournies par le constructeur, équation (8).

Il en découle les éléments du schéma équivalent série R_{seq} et L_{seq} . En effet, ceux ci se déduisent de R_s , R_p et L , (cf. Figure 16) d'après :

$$R_{seq} = \frac{R_s R_p^2 + R_s^2 R_p + (L\omega)^2 R_p}{(R_s + R_p)^2 + (L\omega)^2} \quad (26)$$

$$L_{seq} = \frac{L R_p^2}{(R_s + R_p)^2 + (L\omega)^2}$$

Nous pouvons maintenant comparer les mesures des éléments L_{seq} et R_{seq} , déduites des mesures gain-phase, au calcul découlant des expressions des éléments du modèle.

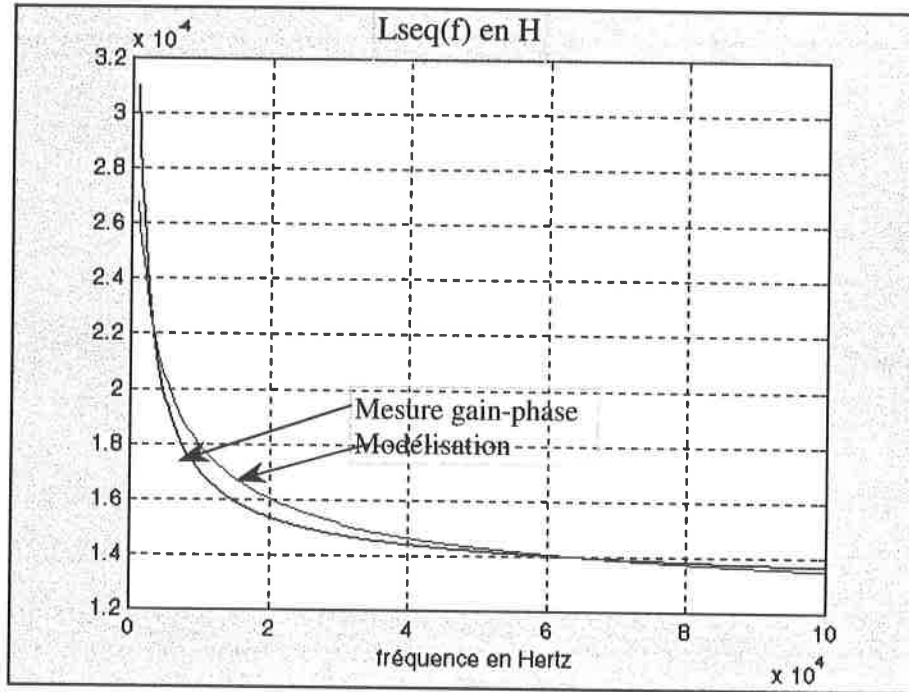


Figure 23 : $L_{seq}(f)$ calculée et mesurée.

La différence entre le calcul de $L_{seq}(f)$ et la mesure gain-phase de $L_{seq}(f)$ est faible pour l'ensemble des fréquences. Pour les faibles fréquences le comportement de l'amplificateur est assimilable à une source de tension. Cela permet de vérifier l'influence du niveau d'induction sur la valeur de l'inductance (plus précisément de la perméabilité, d'après la courbe $\mu_r=f(B)$ fournie en Annexe 1), puisque pour de faibles fréquences celui-ci sera élevé ce qui induit des valeurs plus élevées de l'inductance. Le calcul et la mesure sont en accord tant sur l'allure de l'évolution que sur les valeurs.

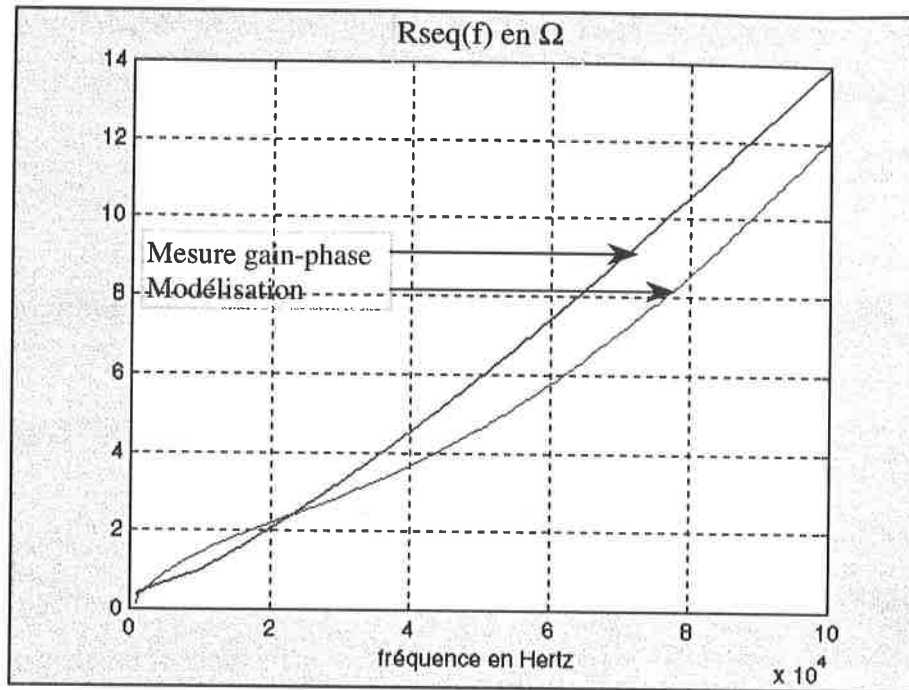


Figure 24 : $R_{seq}(f)$ calculée et mesurée.

Malgré une légère distorsion de la courbe représentant le résultat de la mesure gain-phase de la résistance série, les deux courbes présentent une bonne concordance. Les différences observées peuvent être imputées à la modélisation suggérée par le constructeur puisqu'il précise, ainsi que nous l'avons déjà souligné, que ces modèles présentent une fiabilité de 15%.

E. Bilan de la modélisation électromagnétique

Dans ce chapitre, dédié à la modélisation électromagnétique d'une inductance à noyau torique, notre but était d'extraire un modèle qui pourrait être utilisable dans une routine de dimensionnement.

A cette fin nous avons déterminé une modélisation analytique des pertes Joules en alternatif dans un bobinage, celle-ci a été comparée à des simulations effectuées grâce à un logiciel de calcul de champs par éléments finis. Cette modélisation, valable pour une seule couche de conducteurs, a été étendue à un nombre quelconque de couches. Compte tenu des difficultés inhérentes à la géométrie, un algorithme de calcul a été proposé. Finalement, nous avons réalisé une mesure de résistance sur un bobinage à une couche possédant les mêmes caractéristiques géométriques qu'un bobinage simulé, mais exempt de noyau, de façon à effectuer une séparation physique de mesure des pertes. Ces mesures ont confirmé la validité du modèle à une couche déjà suggérée par les résultats de simulation.

Nous avons ensuite souhaité éprouver la fiabilité des modèles proposés par un fabricant de matériaux magnétiques à base de poudre de fer. Notre effort de modélisation a donc été moindre, mais notre attention s'est portée sur les moyens de mesure. En effet, nous avons montré que, pour caractériser le comportement fréquentiel d'un composant magnétique, l'analyseur d'impédance ne pouvait pas être utilisé tel quel. Nous avons mis en œuvre une amplification du signal de sollicitation délivré par l'analyseur d'impédance. Puis, par des mesures de gain et de phase entre deux signaux prélevés, nous avons pu évaluer les valeurs des éléments résistifs et inductifs d'un modèle série. Le composant test présente des pertes dans le noyau qui dominent nettement celles dans les conducteurs. Cela nous a permis de juger de la qualité de la modélisation à notre disposition.

Un constat s'impose à travers l'ensemble de ces mesures : les paramètres influents sont nombreux et non linéaires. Ceci incite à la vigilance tant sur les mesures que sur les procédures de dimensionnement classiquement utilisées qui conduisent à des erreurs sur toutes les évaluations. Afin de tenir compte des influences fortement non-linéaires des paramètres entre eux, une résolution de dimensionnement par voie numérique s'impose.

CHAPITRE I

L'ensemble de la modélisation nous a semblé suffisamment fiable pour pouvoir constituer la première fondation d'un dimensionnement formulé en termes d'optimisation.

A travers cette étude notre dépendance vis à vis des modèles proposés par un constructeur nous a semblé pénalisant et il serait souhaitable de disposer, au lieu de corrélations empiriques, de modèles physiques du composant. C'est ce que nous nous efforcerons d'apporter dans le chapitre suivant basé sur une modélisation thermique issue de la description physique des échanges de chaleur.

F. Bibliographie

- [2] Catalogue MICROMETALS Iron powder cores, "Power conversion & line filter applications", catalogue 4, 1995.
- [3] F. BLACHE, "Modélisation électronique et électromagnétique d'un transformateur haute fréquence à circuit magnétique en fonte", thèse de doctorat de l'INPG, France (décembre 1995).
- [4] P.L. Dowell, "Effects of eddy currents in transformer windings", IEE Proceeding., vol 113 n°8, 1966.
- [5] PAUTHENET, "Théorie du magnétisme", Techniques de l'ingénieur, vol D2-1, .
- [6] Maxwell users guide, "Maxwell 2D field simulator users guide", Ansoft corporation, volume I et II, Juin 1991.
- [7] J.P. FERRIEUX - F. FOREST, "Alimentations à découpage. Convertisseurs à résonance", 3^e édition, DUNOD, 1999.
- [8] A. ANGOT, "COMPLEMENTS de MATHEMATIQUES à l'usage des ingénieurs de l'électrotechnique et des télécommunications", 6^e édition, MASSON, 1982.
- [9] J. FADAT, "Moteur synchrone à aimants autopiloté appliqué à l'électroménager", Colloque EF'99 (Electrotechnique du futur), p.352-357, Lille, 30-31 mars 1999.
- [10] J.F. LLIBRE, "Étude d'une structure de machine synchrone cylindrique vernier à aimants permanents", thèse de doctorat de l'INPT, France, 1997
- [11] S. SIAMI, "Modélisation fréquentielle des condensateurs à films métallisés : Nouvelles structures de condensateurs à inductance réduite", thèse de doctorat de l'INPT, France, 1997.
- [12] F. TOURKHANI, P. VIAROUGE, J.C. FAGUNDES, "Dimensionnement des composants magnétiques avec prise en compte de l'effet des courants induits dans le bobinage", IEEE , 1995, pp 268-271.
- [13] M. HONDA, "The impedance measurement handbook", Yokogawa-Hewlett-Packard LTD, 1989.

Chapitre II : Étude thermique stationnaire

A. Outils pour la modélisation thermique

Les échanges de chaleur s'effectuent de trois manières : par conduction dans la matière, par convection entre la matière et un fluide, puis par rayonnement entre deux surfaces à travers un milieu transparent ([16], [2] et [3]). La présentation des trois modes de transfert de chaleur est menée à travers la description des phénomènes et des représentations mathématiques permettant leur modélisation.

1. Étude de la conduction

a) Généralités

Nous considérons le régime stationnaire ou permanent. Une approche d'étude en régime instationnaire (ou dynamique) sera menée dans le chapitre III.

Lorsqu'un gradient de température existe dans un milieu matériel, un transport d'énergie a lieu par des porteurs élémentaires (molécules, phonons, électrons). Dans le cas de milieux homogènes et isotropes, la loi de Fourier (équation (27)), rend compte de la proportionnalité entre le gradient de température et le flux de chaleur surfacique noté q . Le coefficient de proportionnalité λ est appelé conductivité thermique.

$$\vec{q} = -\lambda(T) \vec{\nabla} T \quad (27)$$

$$\vec{j} = -\sigma \vec{\nabla} V \quad (28)$$

Il existe une analogie entre la loi de Fourier (équation (27)), et la loi d'Ohm locale (équation (28)). Dans cette analogie, le gradient de température est analogue à une différence de potentiel, le flux de chaleur surfacique est analogue à la densité de courant, et la conductivité thermique est analogue à la conductivité électrique. Ainsi, on pousse communément cette analogie plus loin en utilisant les représentations électrocinétique, pour représenter les échanges thermiques. Pour cela, on calcule des résistances thermiques R_{th} reliant le passage d'un flux de chaleur ϕ à une différence de température $T_1 - T_2$. Ceci donne une forme globale (équation (29)), analogue à la forme globale de la loi d'ohm (équation (30)). Alors

CHAPITRE III

que la loi d'ohm est considérée, dans la plupart des cas, comme linéaire, la dépendance de la conductivité thermique en fonction de la température, ou le couplage avec le rayonnement, qui est non-linéaire, font que l'usage des représentations électrocinétiques est plus restreint en thermique.

$$T_1 - T_2 = R_{th} \phi \quad (29)$$

$$V_1 - V_2 = RI \quad (30)$$

En considérant la densité volumique de flux de chaleur notée p , l'équation de Fourier (27), devient l'équation de la chaleur en régime permanent (31).

$$\Delta T + \frac{p}{\lambda} = 0 \quad (31)$$

$$\text{avec } \Delta T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$

Nous allons maintenant étayer cette approche théorique par le calcul de résistances thermiques de conduction dans des cas simples mais néanmoins utiles à l'électrotechnicien.

Dans le **Tableau 2** figurent quelques ordres de grandeur des conductivités thermiques de matériaux utilisés en électrotechnique, dans la gamme de température qui nous concerne.

	Air	Cuivre	Fer pur	Isolant	poudre de fer
300°K	0.0262	369	55	0.15	4.2
400°K	0.0337	363	40	N.C.	N.C.

Tableau 2 : conductivité en $W.m^{-1} \cdot ^\circ K^{-1}$

Les valeurs de conductivité thermique de l'air représentent quasiment une borne inférieure. La conductivité de l'air fluctue sensiblement avec la température, celle du cuivre pourra être assimilée à une constante, de même pour les matériaux à base de poudre de fer.

b) *Calcul de la résistance thermique d'un tube cylindrique*

Le cas d'un tube creux fournit un résultat directement applicable à l'évaluation de la chute de température aux bornes de l'isolant d'un conducteur électrique. Supposons la température homogène sur la surface intérieure ainsi que la surface extérieure. En se référant à la **Figure 25**, les isothermes sont des surfaces cylindriques de rayon r et de longueur L . Le flux de chaleur radial Φ d'un cylindre de rayon r à travers la surface ($2\pi rL$) permet d'exprimer le flux de chaleur surfacique :

$$q = \frac{\Phi}{2\pi rL} \quad (32)$$

Le problème étant mono dimensionnel de symétrie cylindrique, l'équation de Fourier s'écrit :

$$q = -\lambda \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{\Phi}{2\pi rL} \quad (33)$$

Par intégration, nous obtenons la différence de température aux bornes de l'isolant entre le rayon intérieur ($\frac{dc - e}{2}$) et l'extérieur ($\frac{dc}{2}$) :

$$T\left(\frac{dc - e}{2}\right) - T\left(\frac{dc}{2}\right) = \frac{\phi}{2L\pi\lambda} \ln\left(\frac{dc}{dc - e}\right) \quad (34)$$

En identifiant cette expression à l'expression de l'équation (29), nous obtenons l'expression de la résistance thermique de l'isolant :

$$R_{th} = \frac{\ln\left(\frac{dc}{dc - e}\right)}{2\pi\lambda L} \quad (35)$$

Donnons un premier ordre de grandeur, en considérant un diamètre de conducteur de $2mm$, et un isolant constitué par un émail d'épaisseur $100\mu m$ et de conductivité thermique $0.15W/(m^{\circ}K)$. La résistance thermique de l'émail pour $1m$ ètre vaut alors $0.0544^{\circ}K/(m.W)$. La puissance consommée par effet Joule, correspond au flux de chaleur : $\Phi = RI^2 = \rho \frac{L}{S} I^2$. Il

CHAPITRE III

en résulte que la chute de température aux bornes de l'isolant s'exprime en fonction de l'intensité efficace du courant : $\Delta T = 3,1 \times 10^{-4} I^2$. Ainsi un courant de 50A induirait une chute de température inférieure à 1°K. Cette résistance thermique est d'autant plus négligeable que celle du contact émail-cuivre est sans doute prépondérante.

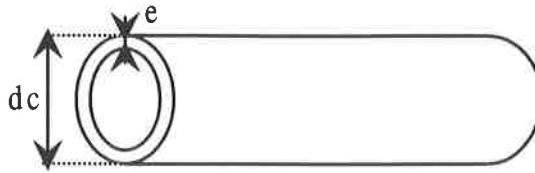


Figure 25 : Cylindre creux.

c) *Calcul de la résistance thermique radiale d'un cylindre avec une source de chaleur interne*

C'est le cas du conducteur de cuivre, mais aussi d'un noyau magnétique. Bien que la géométrie de celui ci ne soit pas toujours cylindrique, on peut s'y ramener. On considère que la puissance volumique notée p est homogène dans le matériau. Les isothermes sont des cylindres, et nous ne considérerons que les variations selon le rayon. De plus la température sur la paroi extérieure est fixe. Compte tenu de ces hypothèses, on peut exprimer l'équation (31) en coordonnées cylindriques, soit :

$$\frac{d^2 T(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dT(r)}{dr} + \frac{p}{\lambda} = 0 \quad (36)$$

La résolution de cette équation combinée aux conditions aux limites permet d'écrire :

$$T(r) = -\frac{p}{4\lambda} r^2 + b \quad (37)$$

Le cylindre étudié est représenté sur la Figure 26, le rayon est noté R, et la longueur L.

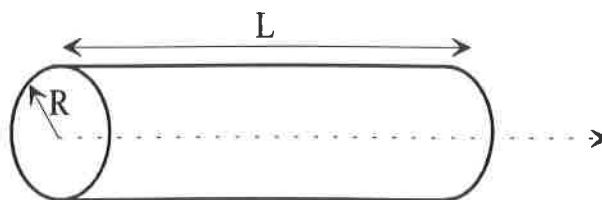


Figure 26 : Cylindre plein.

CHAPITRE III

Le flux de chaleur sortant du cylindre de volume $V(= \pi R^2 L)$, s'exprime $\phi = pV$. D'une part nous écrivons la différence de température entre le centre et le rayon R à partir de l'équation (37) :

$$T(r = R) - T(r = 0) = -\frac{p}{4\lambda} R^2.$$

D'autre part nous identifions, d'après l'équation (29) la résistance thermique par le rapport entre $(T(0) - T(R))$ et Φ , soit l'expression de la résistance thermique qui s'avère négligeable pour le cuivre :

$$R_{th} = \frac{l}{4\lambda\pi L} \quad (38)$$

2. Étude de la convection

a) Généralités

Considérons un corps solide qui est "immergé" dans un fluide (c'est le cas d'un composant magnétique dans l'air). L'échauffement du corps va induire un déplacement du fluide en contact et la chaleur du corps solide va être cédée au fluide. Ce type d'échange est nommé convection. On distingue alors le cas d'un mouvement naturel du fluide qualifié de convection naturelle, et le cas d'un mouvement du fluide provoqué par une action mécanique extérieure qualifié de convection forcée. Notre modélisation sera menée dans le cadre de la convection naturelle. Quoiqu'il en soit, on représente le flux de chaleur surfacique cédé par le solide au fluide à l'aide de la loi de Newton :

$$q_{conv} = \bar{h}(T - \bar{T}_f) \quad (39)$$

Pour déterminer le flux de chaleur convectif, il faut donc connaître le coefficient d'échange (\bar{h}), qui peut être assimilé à une constante, pour de modestes variations de températures. En réalité il dépend des propriétés thermophysiques du fluide et de la géométrie de la surface. En outre les caractéristiques thermophysiques du fluide dépendent de la température, nous nous intéresserons à la détermination du coefficient d'échange dans ce qui va suivre.

CHAPITRE III

b) *Approche quantitative de la convection*

Commençons par décrire le phénomène sur une plaque plane verticale à une température T , dans un environnement à température constante T_{amb} . La masse volumique du fluide, de coefficient d'expansion en température β , à la température T va s'écrire :

$$\rho(T) = \rho_{amb}(T_{amb})(1 - \beta(T - T_{amb})).$$

La modification de la masse volumique du fluide va engendrer une force motrice volumique dont le terme moteur sera :

$$\rho_{amb}\beta(T - T_{amb})g,$$

lequel va induire le mouvement de l'air. Ce mouvement sera freiné par des frottements visqueux, dont un ordre de grandeur peut être donné pour la résultante volumique : $\mu u_r / L^2$ avec L : longueur sur laquelle porte l'échange. L'équilibre de ces forces volumiques s'écrit :

$$\frac{\mu u_r}{L^2} = \rho_{amb}\beta(T - T_{amb})g \quad (40)$$

Ensuite, l'analyse dimensionnelle [16], qui consiste à exprimer le lien entre les grandeurs à partir de leurs unités respectives, permet de mettre en évidence des groupements adimensionnés, tandis que la l'équation (40) permet de pressentir l'organisation de ce regroupement. Citons les principaux groupements adimensionnés qui sont utilisés, et la signification physique qui leur est associée [18][19] :

- nombre de Prandt : $Pr = \nu/a$, caractérise les effets de mouvement par rapport aux effets thermiques,
- nombre de Reynolds : $Re_L = \rho u_r L / \mu$, caractérise le rapport entre les forces de poussée et les forces de friction (frottements visqueux),
- nombre de Nusselt : $Nu_L = \bar{h}L/\lambda$, représente le gradient de température adimensionné au niveau de la paroi. Il intervient directement pour calculer le coefficient de convection.
- nombre de Nusselt local :

$$Nu_x(x) = \frac{h(x)x}{\lambda} \quad (41)$$

CHAPITRE III

Cette expression sera très utile pour nous permettre d'étudier l'effet local de la convection. On montre également à partir de l'analyse dimensionnelle le lien entre les nombres de Reynolds, de Prandtl et de Nusselt sur l'ensemble de la paroi (42) et local (43):

$$Nu_L = cte Re_L^a Pr^b \quad (42)$$

$$Nu_x = cte Re_x^a Pr^b \quad (43)$$

La détermination du nombre de Nusselt passe par celle des nombres de Prandtl, et Reynolds. A partir de l'équation (40), nous exprimons le nombre de Reynolds, pour en déduire l'expression de la vitesse u_r :

$$u_r = \rho_{amb} \beta (T - T_{amb}) g L^2 / \mu .$$

En multipliant u_r par $\rho L / \mu$, nous obtenons :

$$Re = \rho_{amb}^2 \beta (T - T_{amb}) g L^3 / \mu^2 .$$

Il est ainsi possible en vertu des équations (42) et (43) d'exprimer le nombre de Nusselt moyen sur la paroi (44), et local (45):

$$Nu_L = cte \left(\frac{v}{a} \right)^b \left(\frac{\rho^2 g \beta (T - T_{amb}) L^3}{\mu^2} \right)^a \quad (44)$$

$$Nu_x = cte \left(\frac{v}{a} \right)^b \left(\frac{\rho^2 g \beta (T - T_{amb}) x^3}{\mu^2} \right)^a \quad (45)$$

L'expérimentation, permet alors, pour une géométrie donnée, de déterminer les valeurs des exposants a et b , ainsi que la valeur de la constante (cte). Les expressions ainsi obtenues du nombre de Nusselt, sont nommées corrélations.

c) Quelques corrélations

Deux corrélations de première importance, sont celles de la plaque plane en position verticale et horizontale, puisque pour beaucoup de nos composants, les faces qui participent au transfert de chaleur seront assimilables tantôt à une plaque plane en position verticale, tantôt à une plaque plane en position horizontale. Les corrélations proposées sont issues de [16].

CHAPITRE III

Tout d'abord, la corrélation pour une plaque plane verticale, lorsque la température de la paroi (T) est imposée. Le régime d'écoulement peut-être considéré comme laminaire [19]. Les exposants a et b de l'équation (44) sont : $a=b=1/4$, la valeur de la constante est : $cte = 0.59$. La corrélation s'exprime :

$$Nu_L = \frac{\bar{h}L}{\lambda} = 0.59 \left(\frac{g\beta(T - T_{amb})L^3}{\nu a} \right)^{1/4} \quad (46)$$

Il existe également une corrélation locale du nombre de Nusselt, en fonction de la position x sur la paroi en position verticale avec : $a = b = 1/4$ et $cte = 0.39$:

$$Nu_x = \frac{\bar{h}x}{\lambda} = 0.39 \left(\frac{g\beta(T - T_{amb})x^3}{\nu a} \right)^{1/4} \quad (47)$$

Ensuite, pour la face tournée vers le haut d'une plaque plane en position horizontale, les valeurs des exposants sont encore : $a = b = 1/4$, et la valeur de la constante est : $cte = 0.27$:

$$Nu_L = \frac{\bar{h}L}{\lambda} = 0.27 \left(\frac{g\beta(T - T_{amb})L^3}{\nu a} \right)^{1/4} \quad (48)$$

Les propriétés thermophysiques du fluide ($\nu, a, \beta, \lambda, \rho \dots$) variant en fonction de la température elles sont évaluées pour une température du film d'air : $T_f = \frac{T_p + T_{amb}}{2}$ (cf.

“Propriétés thermophysiques de l'air” dans le **GLOSSAIRE**)

Remarque pour le calcul de q_{conv} : La première étape consiste à déterminer la surface d'échange (S), puis le coefficient de convection (h). Celui-ci se déduit des expressions des nombres de Nusselt appropriés, exemples équations (49), (50) et (51). Ces expressions font intervenir les dimensions géométriques, et les propriétés thermophysiques du fluide lesquelles sont disponibles dans [14] ou [15].

Exemple : Considérons une plaque plane en position verticale de hauteur 10cm, chauffée à $T_p=400^\circ\text{C}$, l'air ambiant à $T_{amb}=300^\circ\text{C}$, la température du film vaut $T_f=350^\circ\text{K}$. Le

CHAPITRE III

coefficient de convection moyen de cette plaque dans l'air sera d'après (52):

$\bar{h} = 8.16 W / m^2 \cdot ^\circ K$, le flux de chaleur surfacique (q_{conv} / S) s'en déduit alors :

$$q_{conv} / S = \bar{h}(T - T_{amb}) = 816 W / m^2.$$

3. Étude du rayonnement

a) Généralités

Un corps à une température supérieure au zéro absolu rayonne de l'énergie sous forme électromagnétique. Un corps dont une partie de la surface sera placée en regard pourra intercepter ce rayonnement et le convertir de nouveau en chaleur si les longueurs d'onde de son spectre d'absorption sont compatibles avec celles du rayonnement. Une illustration marquante de cet effet, concerne le rayonnement électromagnétique émis par le soleil, du fait de sa température, qui est intercepté par la terre et convertit en chaleur. La grandeur qui est quantifiée, est le flux de chaleur rayonné par une surface (q_r). Il correspond au bilan entre le rayonnement émis par la surface du corps (q_e) et le rayonnement, provenant d'une source, absorbé par la surface du corps (q_a) :

$$q_R = q_e - q_a \quad (53)$$

Les surfaces sont définies par leurs propriétés radiatives à travers les facteurs de réflexion (ρ), d'émission (ε), d'absorption (α) et de transmission (τ). On déduit des relations entre ces facteurs à partir de la conservation de l'énergie : $\rho + \alpha + \tau = 1$ et de la loi de Drade pour les températures usuelles : $\alpha = \varepsilon$. En fait, ces facteurs ne sont pas des constantes mais varient selon la direction du rayonnement et la longueur d'onde. Toutefois, nous nous placerons dans l'hypothèse où ces facteurs sont isotropes et indépendants de la longueur d'onde. Par ailleurs, les corps soumis à l'étude seront soit transparents (air), soit opaques, le facteur de transmission étant nul dans ce dernier cas ($\tau = 0$), ce qui conduit à :

$$\rho = 1 - \varepsilon \quad (54)$$

CHAPITRE III

La relation (54) est caractéristique des corps gris. Lorsque la surface possède une absorption unitaire, i.e. une émissivité également unitaire, on parle de corps noir : $\alpha = \varepsilon = 1$.

La formule de Stéfán quantifie le flux de chaleur surfacique émis par une surface d'émissivité ε à la température T :

$$q = \sigma \varepsilon T^4 \quad (55)$$

b) Règles de calcul des transferts radiatifs

Les règles de calculs que nous allons présenter, permettent de calculer les échanges par rayonnement entre les surfaces. Ces règles sont valables en supposant les surfaces grises, cette hypothèse étant réaliste, compte-tenu des températures de fonctionnement des composants magnétiques.

Tout d'abord, introduisons la notion de **facteur de vue**. View factor en Anglais, souvent qualifié de facteur de forme en Français, mais nous préférons l'appellation facteur de vue afin d'éviter la confusion possible avec les facteurs de forme définis en électrotechnique. Il est préférable pour un électrotechnicien de s'en tenir à la première appellation afin d'éviter l'amalgame avec le facteur de forme utilisé pour caractériser les signaux. C'est une quantité purement géométrique qui caractérise le quotient entre l'angle selon lequel une surface (1) "voit" une autre surface (2) et sa "vision totale". Nous le noterons f_{12} . De manière générale son calcul est complexe :

$$f_{12} = \frac{1}{\pi S_1} \int_{S_1} dS_1 \int_{S_2} \frac{\cos \theta_1 \cos \theta_2}{M_1 M_2^2} dS_2.$$

S1 et S2 sont deux surfaces en regard. M1 et M2 deux points appartenants à ces surfaces. La droite qui relie M1 et M2 fait un angle θ_1 avec la normale à la surface S1 en M1, et un angle θ_2 avec la normale à la surface S2 en M2.

Cependant, à partir de quelques relations connues pour des géométrie classiques et de quelques règles, on peut en déduire beaucoup d'autres. Ainsi si N (1, 2,...k, ...N) surfaces forment une enceinte fermée, la conservation d'énergie permet d'écrire N équations, soit pour une surface k :

$$\sum_{j=1}^N f_{kj} = 1 \quad (56)$$

Le théorème de réciprocité, permet d'écrire un nombre C_N^2 d'équations du type :

$$S_k f_{kj} = S_j f_{jk} \quad (57)$$

Pour des configurations particulières, on peut obtenir des équations supplémentaires :

- corps convexe (surface plane) a un facteur de vue nul ($f_{kk} = 0$),
- corps j entourant complètement un corps convexe k, a un facteur de vue unitaire ($f_{kj} = 1$).

D'autres relations peuvent être obtenues par symétrie. L'objectif de ce dénombrement est de pouvoir calculer tous les facteurs de vue d'une configuration, leur connaissance pouvant être une condition sine qua non du calcul des échanges par rayonnement.

Les calculs de radiosité permettent de déterminer le flux net reçu par une surface à partir de la connaissance des facteurs de vue, et des propriétés radiatives des surfaces, en particulier l'émissivité (ϵ) et la réflectivité (ρ). Dans le cadre de nos modélisations, toutes les surfaces sont grises, ce qui simplifie le problème en vertu de (54). Commençons par définir le flux net (ou rayonné) d'une surface j qui est la différence entre le flux partant et le flux incident (58) (ceci est à rapprocher à l'équation (53)) :

$$q_j^N = q_j^P - q_j^I \quad (58)$$

Le flux partant q_j^P , résulte de l'émission du corps à la température T_j selon une loi de Stefan ($q_j^P = \sigma \epsilon_j T_j^4$), et de la portion du flux incident qui a été réfléchi ($\rho_j q_j^I$). Pour des corps gris, nous avons : $\epsilon_j = 1 - \rho_j$, d'où :

$$q_j^P = \sigma \epsilon_j T_j^4 + (1 - \epsilon_j) q_j^I \quad (59)$$

Le flux incident q_j^I , résulte des portions de flux partants de chaque surface, vues par la surface j, c'est à dire pondérées par leurs facteurs de vue :

$$q_j^i = \sum_{k=1}^N f_{jif} q_k^p \quad (60)$$

Étant donné que ces notions peuvent sembler abstraites pour ceux qui les découvrent, nous allons les exploiter pour mettre en évidence une relation connue.

c) *Application au cas d'un corps placé dans une enceinte en équilibre thermique*

Le corps considéré est indicé 1, d'émissivité ϵ_1 à la température T_1 . L'enceinte, indicée 2, peut être assimilée à un corps noir $\epsilon_2 = 1$ à la température ambiante T_{amb} . Les 4 facteurs de vue définissant le système d'un point de vue géométrique sont : $f_{11}, f_{12}, f_{21}, f_{22}$. D'après les règles énoncées précédemment, le corps 1 est convexe, soit : $f_{11} = 0$, et la conservation de l'énergie (56) permet d'écrire que : $f_{11} + f_{12} = 1$, soit : $f_{12} = 1$. En fait, la connaissance de ces deux facteurs de vue suffit au calcul du flux net rayonné par la surface du corps 1.

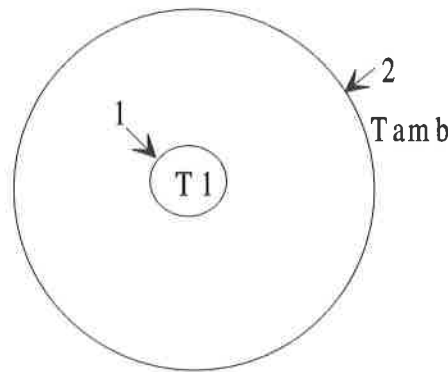


Figure 27 : Corps 1, placé dans une enceinte en équilibre thermique 2.

D'après les règles de calcul des flux on écrit pour le corps 1 :

$$-q_1^p = \sigma \epsilon_1 T_1^4 + (1 - \epsilon_1) q_1^i \text{ en appliquant (59),}$$

$$-q_1^i = f_{11} q_1^p + f_{12} q_2^p \text{ en appliquant (60), soit } q_1^i = q_2^p.$$

Pour l'enceinte d'émissivité unitaire :

$$-q_2^p = \sigma T_{amb}^4 \text{ en appliquant (59).}$$

Le flux net surfacique rayonné par le corps 1 se calcule à partir de : $q_1^R = q_1^p - q_1^i$, il vient alors, la formule classique de calcul du flux rayonné :

$$q_l^R = \sigma \epsilon_l (T_l^4 - T_{amb}^4) \quad (61)$$

4. Quelques ordres de grandeur pour les matériaux de l'Électrotechnique

Les caractéristiques thermophysiques qui nous concernent pour l'étude thermique des composants passifs, tels que l'émissivité de la surface ou la capacité calorifique du matériau, ne se trouvent pas aisément dans les ouvrages généraux, et sont rarement donnés par le constructeur. Nous avons dû caractériser certaines d'entre elles, notamment les émissivités des fils de cuivre émaillé :

- $\epsilon_c = 0.8$, l'origine de cette valeur et les mesures associées sont présentées dans [19],

du revêtement des noyaux magnétiques :

- $\epsilon_f = 0.9$.

B. Étude thermique d'un bobinage dans l'air

Les représentations mathématiques et règles de calcul sont utilisées pour obtenir un modèle analytique du comportement thermique d'un simple bobinage. Des mesures par thermocouples permettent d'apprécier la validité du modèle.

1. Description géométrique et physique du composant

Le composant sur lequel porte la modélisation thermique est constitué par un bobinage de conducteurs électriques émaillés (Figure 28). Ce composant apparemment simple, se révèle cependant difficile à modéliser du point de vue thermique. Cette géométrie sert de base aux inductances et transformateurs qui sont constitués de plusieurs couches de bobinage associées au matériau magnétique. Le bobinage sera étudié en position verticale pendu à 5cm du plan de la table.

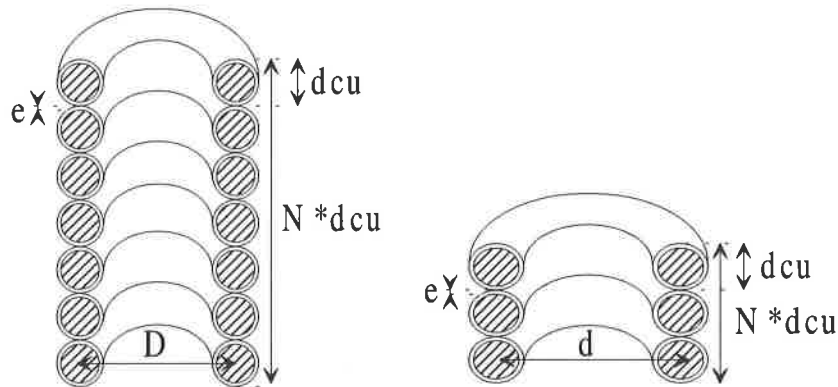


Figure 28 : Représentation du bobinage.

D : diamètre moyen de la bobine (m),

d_c : diamètre du conducteur (incluant l'émail) (m),

N : nombre de spires.

L'objectif de cette modélisation thermique est d'obtenir une expression analytique valide pour de grandes disparités de dimensions géométriques et de fonctionnement électrique ; par exemple, une bobine de "faible" diamètre (D) de "grande" hauteur ($N \times d_{cu}$) et traversée par un faible courant électrique Figure 28 ou encore une bobine de "grand" diamètre (D) de

“faible” hauteur ($N \times dcu$) et traversée par un courant électrique élevé **Figure 28**. Les surfaces d'échange considérées sont les surfaces des spires : ainsi pour une inductance de hauteur : $N \times dcu$, les surfaces d'échange extérieures (S_{ext}) et intérieures (S_{int}) sont équivalentes à un cylindre de hauteur : $N \times dcu$ (éventuellement multiplié par un coefficient $\pi / 2$, afin de prendre en compte la surface d'échange des spires).

$$S_{ext} = N \times d_c \times \pi(D + d_c) \quad (62)$$

$$S_{int} = N \times d_c \times \pi(D - d_c) \quad (63)$$

La description physique du composant se résume à l'expression de la puissance transformée en chaleur par ce composant, par effet Joule. Ainsi, le flux de chaleur à évacuer dû aux pertes par effet Joule se calcule à partir de : $P = RI_{eff}^2$.

$R = \rho \frac{L}{S}$: résistance du conducteur (Ω),

ρ : résistivité du conducteur électrique en cuivre ($1.69 \times 10^{-8} \Omega.m$ à $293^\circ K$),

$L = N\pi D$: longueur du conducteur (m),

$S = \pi \frac{d_c^2}{4}$: section de passage du courant électrique (mm^2),

I_{eff} : intensité efficace du courant électrique (A).

Ainsi, en considérant la variation de la résistivité du cuivre en fonction de la température :

$\rho(T) = 1,69(1 + 0,0043(\overline{T_c} - 293)) \times 10^{-8} \Omega.m$, les pertes moyennes ont pour expression :

$$P = 4 \times 1.69(1 + 0.0043 \times (T - 293^\circ K)) \times 10^{-8} \frac{ND}{d_{cu}^2} I_{eff}^2 \quad (64)$$

La modélisation thermique va porter sur l'évacuation de cette puissance, convertie en chaleur.

2. Hypothèses relatives à la conduction

La modélisation de la conduction thermique dans l'inductance à air est un problème complexe, puisqu'il s'avère être tridimensionnel et ce, malgré son apparente symétrie cylindrique. Nous allons mettre en évidence l'influence de la conduction selon la direction,

CHAPITRE III

afin d'émettre des hypothèses simplificatrices. En se référant à la **Figure 29**, il apparaît 3 axes selon lesquels la conduction thermique est à étudier. Nous nous contenterons d'une approche qualitative permettant de savoir si "grosso-modo" selon la direction la conduction pourrait être négligée ou considérée. Pour cela nous étudierons séparément chacune des 3 directions : radial (selon le rayon d'un conducteur), transversal entre spires et axial (selon l'axe d'une spire) (**Figure 29**).

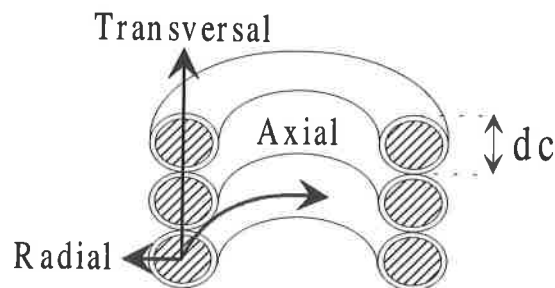


Figure 29 : Axes d'étude de la conduction.

a) Conduction dans la direction radiale

Dans cette direction et pour un excellent conducteur thermique comme le cuivre cette résistance thermique est d'ordinaire très faible et négligeable. Vérifions le. A partir de l'équation (37), on peut exprimer la différence de température entre le centre du conducteur et sa périphérie, soit :

$$T(r=0) - T(r = \frac{dc}{2}) = -\frac{p}{4\lambda} \left(\frac{dc}{2}\right)^2, \text{ ou } p \text{ représente les pertes volumiques, qui s'expriment :}$$

$$p = \frac{RI^2}{Vol}, \text{ avec } R = \rho \frac{L}{\pi(dc^2/4)} \text{ et } Vol = L\pi(dc^2/4), \text{ d'où :}$$

$$T(r=0) - T(r = \frac{dc}{2}) = \frac{\rho}{\lambda\pi^2 dc^2} I^2 \quad (65)$$

Il reste à procéder à une application numérique de l'équation (65), réaliste afin d'en tirer un ordre de grandeur. Considérons un conducteur de cuivre ($\rho = 1.8 \times 10^{-8} \Omega m$; $\lambda = 400 W \cdot K^{-1} m^{-1}$), de diamètre $dc = 2 mm$, pour un courant d'intensité comprise entre 0 A et 50 A, la différence de température sera comprise dans l'intervalle :

CHAPITRE III

$0^\circ K < T(0) - T(dc/2) < 2.8 \times 10^{-3}^\circ K$. Cette différence de température est tout à fait négligeable, nous négligerons alors la conduction thermique dans cette direction.

b) Conduction entre 2 spires : direction transversale

Nous allons nous appuyer sur le résultat du calcul fait dans [19], qui conclut que le flux de chaleur dans cette direction est négligeable. En effet, la surface de contact entre 2 spires est dans le meilleur des cas très faible et dans le pire inexistante, ceci est illustré par la surface de contact au point Sc de la **Figure 30**.

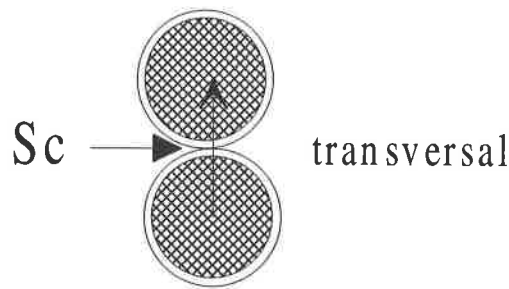


Figure 30 : Zoom sur la surface de contact entre deux spires.

c) Conduction dans la direction axiale d'une spire

Habituellement, lorsque la géométrie est cylindrique, on considère l'homogénéité selon la direction axiale. Pour le bobinage dans l'air, même si cela peut sembler insignifiant cette géométrie est rompue, par le développement en hélice des spires. La question est alors de savoir si la résistance thermique est dans cette direction négligeable, auquel cas la température par spires et dans tout le bobinage peut être considérée homogène, ou si cette résistance thermique est suffisamment importante pour que la conduction soit négligeable. Dans ce dernier cas, cela implique que nous considérons des différences de température entre spires, et que nous ayons une approche locale de la modélisation thermique. Pour y répondre nous proposons un calcul explicatif qui n'a toutefois pas la rigueur d'une démonstration :

-la résistance thermique d'un cylindre de longueur L, de section S d'un matériau de

conductivité λ , s'exprime : $R_{th} = \frac{L}{\lambda S}$, relation analogue à celle d'une résistance électrique.

A partir de cette relation on constate que la section de passage du flux est petite (par rapport à celle de la conduction radiale), tandis que la longueur qui est celle des bobinages est grande (par rapport à la conduction radiale ou cette dimension était le rayon du conducteur), malgré la

CHAPITRE III

valeur élevée de λ , cette résistance thermique semble être de valeur relativement élevée. Effectuons une application numérique reposant sur les dimensions d'un bobinage qui a été réalisé et a servi aux mesures : $N = 10$ spires; $D = 5$ cm; $d_c = 2$ mm. La longueur du bobinage s'exprime : $L = N\pi D = 1.57$ m, il en résulte :

$$R_{th} = 1250 \text{ }^\circ\text{K} / \text{W}$$

Cette résistance thermique est élevée, il reste à savoir si elle est à l'origine d'une différence de température dans le bobinage. Pour cela nous allons nous appuyer sur une mesure qui sera développée ultérieurement, qui montre que la température dans le bobinage est inhomogène. Ainsi, pour $I = 30$ A la différence de température maximale qui apparaît entre les spires (environ entre la plus basse, soit n°1, et la n°8) est de 8°C . Le flux de chaleur qui transiterait

peut être approximativement obtenu à partir de : $\Phi = \frac{\Delta T}{R_{th}} = 6.4$ mW. Ce flux est très faible et

peut donc sembler négligeable, pourtant la différence de température induit une différence de la résistivité électrique, qui peut être à l'origine de ce flux. La question que nous pouvons légitimement nous poser est : Est ce que cette résistance thermique engendre la différence de température ?

Pour y répondre on peut estimer le flux qui résulte de cette différence de température : $\Delta\Phi = R_o \alpha \Delta T \times I^2$, une application numérique ($R_o = 0.9$ m Ω ; $\alpha = 0.04$; $I = 30$ A; $\Delta T = 8^\circ\text{K}$) donne : $\Delta\Phi = 52$ mW. Ce flux est sensiblement plus élevé que celui qui résulterait de la résistance thermique de conduction dans le sens axial par spires. On considérera donc que la résistance thermique entre spires est grande.

d) Incidence de l'étude de la conduction

Les pertes dépendent de la température du cuivre, qui évolue selon la position sur la bobine (résistances thermiques dans les sens axial et transversal élevées), mais reste constante sur une spire (résistance radiale faible). Nous considérons, donc que les isothermes sont des anneaux (**Figure 31**). Ceci nous amène à définir une expression locale des pertes :

$$P(T(x)) = 4 \times 1.8 (1 + 4 \times 10^{-3} (T(x) - 293)) \frac{ND}{d_c^2} I_{eff}^2 \frac{\Delta x}{H} \quad (66)$$

CHAPITRE III

Cette expression locale des pertes permettra de définir un flux local de chaleur à évacuer, et d'en déduire la température locale. Pour cela, nous considérons une distribution de pertes sur un cylindre de hauteur égale à celle du bobinage, et nous modéliserons les échanges au niveau d'un anneau d'épaisseur très petite (dx) devant les autres dimensions.

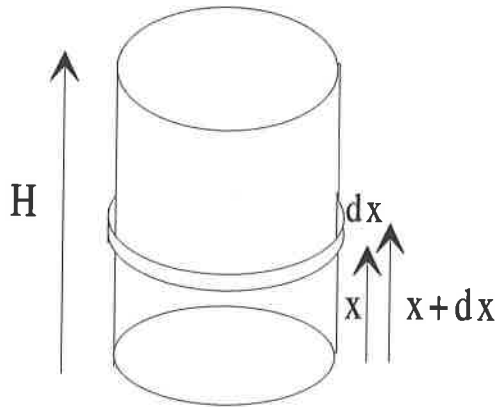


Figure 31 : Cylindre équivalent à l'inductance à air dont les isothermes sont des anneaux.

3. Modélisation de la convection

a) Modèle global de la convection

Les conditions de l'étude permettent de montrer [19], d'une part que le régime est laminaire et d'autre part que l'épaisseur de la couche limite thermique est faible devant le diamètre intérieur, ce qui nous autorise à utiliser les corrélations présentées pour une plaque plane (équations (46) et (47)). En effet, l'épaisseur de la couche limite (δ_T) se calcule : $\delta_T = k_{air} / h$, avec la conductivité thermique de l'air $k_{air} = 0.03W / m.^{\circ}K$ et un ordre de grandeur du coefficient de convection $h = 8W / m^2.^{\circ}K$, d'où $\alpha / hc = 4mm$. Celle ci reste très inférieure à la hauteur de la plus petite bobine (40mm). Le coefficient de convection peut donc s'exprimer, en fonction des paramètres thermophysiques ($\lambda, \beta, a, \nu, T_{amb}$) de l'air et de la différence de température, sous une forme moyenne, sur l'ensemble de la hauteur. Les coefficients thermophysiques de l'air peuvent varier dans des proportions importantes, le modèle sera donc plus précis si on utilise une relation linéaire exprimant les variations de ces propriétés pour la gamme de température qui nous intéresse. On évalue ces propriétés [16] à

CHAPITRE III

la température moyenne du film d'air ($T_f = \frac{T_s + T_a}{2}$) et ce, pour la gamme $[300^\circ K; 400^\circ K]$:

$$\beta = \frac{1}{T_f}$$

$$\lambda = 0.76 \times 10^{-5} T_f + 0.0034$$

$$\nu = (0.0102 T_f - 1.49) 10^{-5}$$

$$a = (0.0152 T_f - 2.34) 10^{-5}$$

Le flux de chaleur global évacué par convection (68) s'exprime directement en fonction du coefficient de convection (67) :

$$h = 0.59 \times \lambda \left(\frac{g\beta(\bar{T}_c - T_{amb})}{a\nu H} \right)^{0.25} \quad (67)$$

$$\Phi_{ext}^{conv} + \Phi_{int}^{conv} = K \times h(S_{ext} + S_{int})(\bar{T}_c - T_{amb}) \quad (68)$$

Les surfaces sur lesquelles portent l'échange par convection s'expriment pour la face extérieure équation (62) et pour la face intérieure équation (63). Toutefois ces surfaces doivent être affectées d'un coefficient ($K = \pi/2$) qui représente l'effet de la forme réelle des spires.

b) *Modèle local de la convection*

En utilisant la corrélation (47) donnant le nombre de Nusselt local d'une plaque plane en position verticale, nous exprimons le coefficient de convection local (69), dont dépend le flux de chaleur évacué par convection par l'anneau (équation (70)), pour les deux faces.

$$h(x) = 0.39 \times \lambda \left(\frac{g\beta(T(x) - T_{amb})}{a\nu x} \right)^{\frac{1}{4}} \quad (69)$$

$$\Delta(\Phi_{ext}^{conv} + \Phi_{int}^{conv}) = K \times h(x)(\Delta S_{ext} + \Delta S_{int})(T(x) - T_{amb}) \quad (70)$$

CHAPITRE III

La surface des anneaux s'expriment pour la face extérieure : $\Delta S_{ext} = \pi(D + d_c)\Delta x$ et pour la face intérieure : $\Delta S_{int} = \pi(D - d_c)\Delta x$.

4. Modélisation du rayonnement

a) Rayonnement extérieur

(1) Modèle global du rayonnement extérieur

Des mesures de réflectivité [19] sur une surface constituée de spires, ont permis de mesurer la valeur de l'émissivité équivalente pour la surface constituée par les spires : $\epsilon = 0.8$. L'expression du flux de chaleur rayonné vers l'extérieur, qui se comporte comme un corps noir à la température T_{amb} s'exprime :

$$\Phi_{ext}^{ray} = \sigma \epsilon S_{ext} (\overline{T_c}^4 - T_{amb}^4) \quad (71)$$

La surface sur laquelle porte l'échange est la surface extérieure du cylindre de hauteur Nd_c exprimée par l'équation (62), puisque l'émissivité a été mesurée pour un équivalent plan du bobinage, et inclut donc l'effet de la forme des spires.

(2) Modèle local du rayonnement extérieur

En considérant la puissance émise par une bande d'épaisseur Δx , la puissance rayonnée vers l'extérieur s'écrit :

$$\Delta \Phi_{ext}^{ray} = \sigma \epsilon \Delta S_{ext} (T(x)^4 - T_{amb}^4) \quad (72)$$

La surface d'un anneau s'exprime pour la face extérieure : $\Delta S_{ext} = \pi(D + d_c)\Delta x$.

b) Rayonnement intérieur

(1) Description de la démarche

CHAPITRE III

La géométrie du bobinage, fait que la surface à l'intérieur du cylindre rayonne de l'énergie vers l'extérieur soit directement soit par l'intermédiaire de réflexion sur elle-même, voir le schéma illustratif de la **Figure 32**. L'évaluation des échanges radiatifs dans ce contexte nécessite l'utilisation des outils théoriques présentés au paragraphe 1).c de ce chapitre.

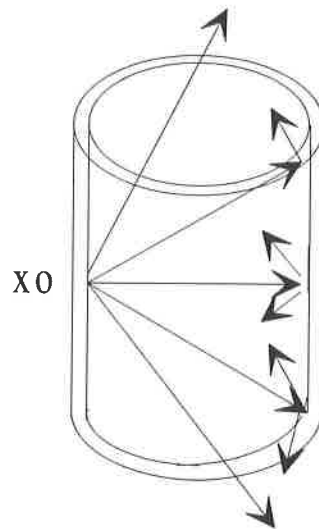


Figure 32 : *Illustration du rayonnement intérieur.*

Pour déterminer le rayonnement intérieur en fonction de la position sur la bobine, nous partons du constat que dans une position verticale, les **isothermes sont des anneaux**. Mais, la caractéristique du rayonnement à l'intérieur du composant est que l'échange de chaleur interfère sur lui-même. Ainsi pour déterminer l'énergie échangée par l'anneau à la position x_0 , il faut connaître la température de la bobine en chaque point soit $T(x)$. L'énergie échangée peut alors être calculée. Cependant notre démarche diffère de l'approche classique puisque nous voulons déterminer l'évolution de la température. La démarche est donc la suivante :

- une première étude donne une estimation de la **température moyenne de la bobine**, à partir des flux de chaleur convectifs et radiatifs moyens ; le flux de chaleur radiatif global nécessite le calcul du **facteur de vue de la bobine sur elle-même** ;
- ensuite, nous relierons la **température d'un anneau à la position x** à celle de la bobine à la température moyenne calculée, à partir des expressions locales des flux de chaleur convectifs et radiatifs ; le flux de chaleur radiatif local fait apparaître le **facteur de vue entre l'anneau et la bobine**.

(2) Modélisation globale du rayonnement intérieur

appliquer les règles de calcul des échanges par rayonnement présentées au chapitre. La première étape consiste à calculer le facteur de vue de la bobine, soit du **cylindre 3**, qui représente l'intérieur de la bobine, de la Figure 33 (Les **disques fictifs 1 et 2** représentent l'extérieur à la température T_{amb}).

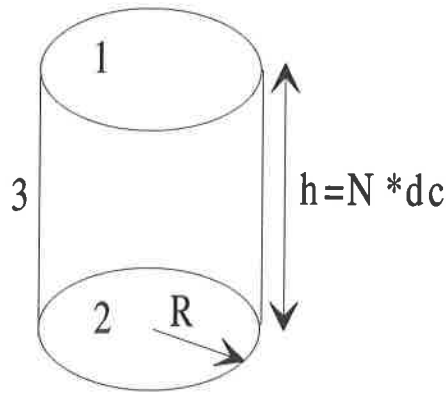
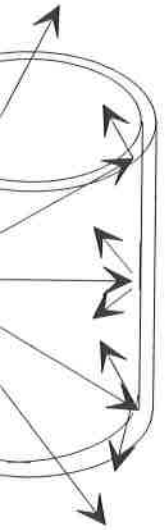


Figure 33 :Cylindre équivalent au bobinage.

du rayonnement intérieur.

ns d'exprimer le facteur de vue f_{33} . Les règles (56) et (57) ainsi que les particulières appliquées au cylindre fermé par deux disques permettent de l'énergie :

$$\begin{cases} f_{11} + f_{12} + f_{13} = 1 \\ f_{21} + f_{22} + f_{23} = 1 \\ f_{31} + f_{32} + f_{33} = 1 \end{cases}$$

éciprocité :

$$\begin{cases} S_1 f_{13} = S_3 f_{31} \\ S_2 f_{23} = S_3 f_{32} \\ S_1 f_{12} = S_2 f_{21} \end{cases}$$

et 2 sont convexes :

$$f_{11} = f_{22} = 0$$

de la bobine permettent d'écrire :

$$\begin{cases} f_{12} = f_{21} \\ f_{13} = f_{23} \\ f_{31} = f_{32} \end{cases}$$

ue entre 2 disques, soit f_{12} fait partie des expressions classiques [16] :

CHAPITRE III

La surface des anneaux s'expriment pour la face extérieure : $\Delta S_{ext} = \pi(D + d_c)\Delta x$ et pour la face intérieure : $\Delta S_{int} = \pi(D - d_c)\Delta x$.

4. Modélisation du rayonnement

a) Rayonnement extérieur

(1) Modèle global du rayonnement extérieur

Des mesures de réflectivité [19] sur une surface constituée de spires, ont permis de mesurer la valeur de l'émissivité équivalente pour la surface constituée par les spires : $\varepsilon = 0.8$. L'expression du flux de chaleur rayonné vers l'extérieur, qui se comporte comme un corps noir à la température T_{amb} s'exprime :

$$\Phi_{ext}^{ray} = \sigma \varepsilon S_{ext} (\overline{T_c}^4 - T_{amb}^4) \quad (71)$$

La surface sur laquelle porte l'échange est la surface extérieure du cylindre de hauteur Nd_c exprimée par l'équation (62), puisque l'émissivité a été mesurée pour un équivalent plan du bobinage, et inclut donc l'effet de la forme des spires.

(2) Modèle local du rayonnement extérieur

En considérant la puissance émise par une bande d'épaisseur Δx , la puissance rayonnée vers l'extérieur s'écrit :

$$\Delta \Phi_{ext}^{ray} = \sigma \varepsilon \Delta S_{ext} (T(x)^4 - T_{amb}^4) \quad (72)$$

La surface d'un anneau s'exprime pour la face extérieure : $\Delta S_{ext} = \pi(D + d_c)\Delta x$.

b) Rayonnement intérieur

(1) Description de la démarche

CHAPITRE III

La géométrie du bobinage, fait que la surface à l'intérieur du cylindre rayonne de l'énergie vers l'extérieur soit directement soit par l'intermédiaire de réflexion sur elle-même, voir le schéma illustratif de la **Figure 32**. L'évaluation des échanges radiatifs dans ce contexte nécessite l'utilisation des outils théoriques présentés au paragraphe 1).c de ce chapitre.

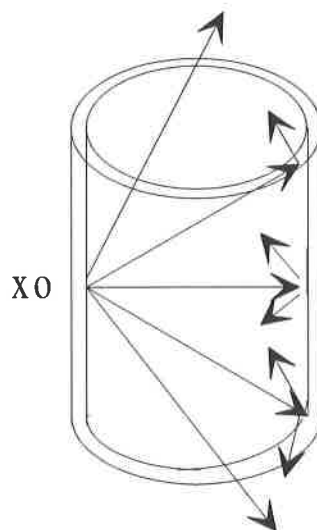


Figure 32 : Illustration du rayonnement intérieur.

Pour déterminer le rayonnement intérieur en fonction de la position sur la bobine, nous partons du constat que dans une position verticale, les **isothermes sont des anneaux**. Mais, la caractéristique du rayonnement à l'intérieur du composant est que l'échange de chaleur interfère sur lui-même. Ainsi pour déterminer l'énergie échangée par l'anneau à la position x_0 , il faut connaître la température de la bobine en chaque point soit $T(x)$. L'énergie échangée peut alors être calculée. Cependant notre démarche diffère de l'approche classique puisque nous voulons déterminer l'évolution de la température. La démarche est donc la suivante :

- une première étude donne une estimation de la **température moyenne de la bobine**, à partir des flux de chaleur convectifs et radiatifs moyens ; le flux de chaleur radiatif global nécessite le calcul du **facteur de vue de la bobine sur elle-même** ;
- ensuite, nous relierons la **température d'un anneau à la position x** à celle de la bobine à la température moyenne calculée, à partir des expressions locales des flux de chaleur convectifs et radiatifs ; le flux de chaleur radiatif local fait apparaître le **facteur de vue entre l'anneau et la bobine**.

(2) Modélisation globale du rayonnement intérieur

CHAPITRE III

Nous allons appliquer les règles de calcul des échanges par rayonnement présentées au paragraphe de ce chapitre. La première étape consiste à calculer le facteur de vue de la bobine sur elle même, soit du **cylindre 3**, qui représente l'intérieur de la bobine, de la **Figure 33** sur lui même. Les **disques fictifs 1 et 2** représentent l'extérieur à la température T_{amb} .

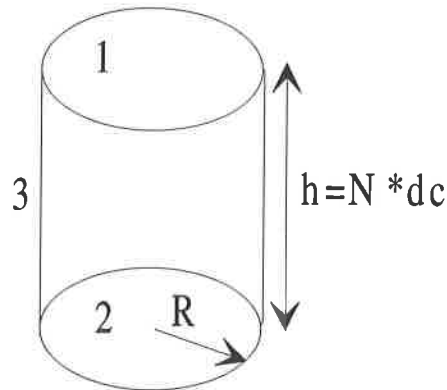


Figure 33 : Cylindre équivalent au bobinage.

Nous essaierons d'exprimer le facteur de vue f_{33} . Les règles (56) et (57) ainsi que les configurations particulières appliquées au cylindre fermé par deux disques permettent d'écrire :

Conservation de l'énergie :

$$\begin{cases} f_{11} + f_{12} + f_{13} = 1 \\ f_{21} + f_{22} + f_{23} = 1 \\ f_{31} + f_{32} + f_{33} = 1 \end{cases}$$

Théorème de réciprocité :

$$\begin{cases} S_1 f_{13} = S_3 f_{31} \\ S_2 f_{23} = S_3 f_{32} \\ S_1 f_{12} = S_2 f_{21} \end{cases}$$

Les disques 1 et 2 sont convexes :

$$f_{11} = f_{22} = 0$$

Les symétries de la bobine permettent d'écrire :

$$\begin{cases} f_{12} = f_{21} \\ f_{13} = f_{23} \\ f_{31} = f_{32} \end{cases}$$

Le facteur de vue entre 2 disques, soit f_{12} fait partie des expressions classiques [16] :

$$f_{12} = \frac{1}{2} [2 + (h/R)^2 - (h/R) \sqrt{(h/R)^2 + 4}] \quad (73)$$

La résolution du système d'équations permet d'exprimer le facteur de vue qui nous intéresse :

$$f_{33} = 1 - 2 \frac{S_1}{S_3} (1 - f_{12}) \quad (74)$$

Les surfaces s'expriment :

$$\begin{cases} S_1 = S_2 = \pi R^2 \\ S_3 = 2\pi R h \end{cases}$$

Il en résulte l'expression du facteur de vue en fonction des dimensions géométriques, (Remarque $R = (D - dc) / 2$) :

$$f_{33} = \frac{1}{2} [2 + (h/R) - \sqrt{(h/R)^2 + 4}] \quad (75)$$

Nous allons maintenant calculer le flux de chaleur global rayonné par l'intérieur de la bobine vers l'extérieur. Pour cela nous utiliserons les règles de calcul de radiosités (58), (59) et (60).

Le flux net rayonné par la bobine (q_3) s'exprime en vertu de (58) :

$$q_3 = q_3^p - q_3^i$$

Les expressions des flux partants de chacune des surfaces sont reliées par le système d'équations suivantes d'après la règle (59) :

$$\begin{cases} q_1^p = \sigma \epsilon_1 T_1^4 + (1 - \epsilon_1) q_1^i \\ q_2^p = \sigma \epsilon_2 T_2^4 + (1 - \epsilon_2) q_2^i \\ q_3^p = \sigma \epsilon_3 T_3^4 + (1 - \epsilon_3) q_3^i \end{cases}$$

D'après la règle (60), les flux incidents s'expriment en fonction des facteurs de vue entre les surfaces, soit :

$$\begin{cases} q_1^i = f_{11}q_1^p + f_{12}q_2^p + f_{13}q_3^p \\ q_2^i = f_{21}q_1^p + f_{22}q_2^p + f_{23}q_3^p \\ q_3^i = f_{31}q_1^p + f_{32}q_2^p + f_{33}q_3^p \end{cases}$$

Compte tenu des propriétés radiatives des disques représentant l'environnement ($\epsilon_1 = \epsilon_2 = 1$), à la température T_{amb} et du cylindre représentant l'intérieur de la bobine ($\epsilon_3 = \epsilon$) à la température \bar{T}_c , ainsi que les relations entre les facteurs de vue, nous exprimons le flux surfacique rayonné q_3 en fonction du facteur de vue f_{33} :

$$q_3 = \sigma\epsilon \frac{(1 - f_{33})}{(1 + f_{33}(\epsilon - 1))} (\bar{T}_c^4 - T_{amb}^4) \quad (76)$$

D'où le flux de chaleur rayonné par la surface intérieure de la bobine :

$$\Phi_{int}^{ray} = \sigma\epsilon S_{int} \frac{(1 - f_{33})}{(1 + f_{33}(\epsilon - 1))} (\bar{T}_c^4 - T_{amb}^4) \quad (77)$$

(3) Modélisation locale du rayonnement intérieur

Nous nous intéressons ici, au calcul du flux de chaleur net reçu par l'anneau d'épaisseur dx suffisamment petite pour pouvoir négliger son influence sur les autres surfaces, y compris sur elle même.

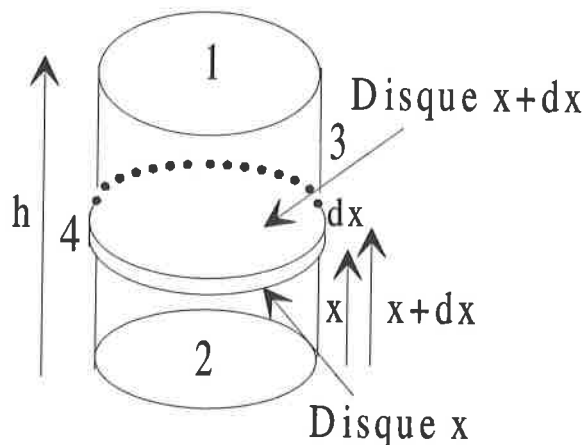


Figure 34 : Cylindre équivalent au bobinage avec anneau isotherme.

Il est nécessaire de calculer au préalable le facteur de vue de l'anneau vers la surface intérieure du cylindre : f_{43} .

CHAPITRE III

Nous considérons l'anneau, noté 4 pris en sandwich entre le disque inférieur à la position x et le disque supérieur à la position $x+dx$. Nous noterons les facteurs de vue associés à ces disques par un indice x ou $x+dx$.

Le facteur de vue de 1 sur 4, est la différence du facteur de vue du disque 1 sur le disque x et du disque 1 sur le disque $x+dx$:

$$f_{14} = f_{1x} - f_{1(x+dx)}$$

D'où :

$$f_{14} = -\frac{f_{1(x+dx)} - f_{1x}}{dx} dx = -\frac{\partial f_{1x}}{\partial x}$$

De la même manière entre le disque 2 et l'anneau 4 nous obtenons :

$$f_{24} = f_{2(x+dx)} - f_{2x} = \frac{\partial f_{2x}}{\partial x} dx.$$

Pour finalement établir l'expression du facteur de vue f_{43} , nous allons à nouveau exploiter les règles (56) et (57).

Le théorème de réciprocité s'écrit :

$$\begin{aligned} S_4 f_{41} &= S_1 f_{14} \\ S_4 f_{42} &= S_2 f_{24} \end{aligned}, \text{ avec } \begin{aligned} S_1 &= S_2 = \pi R^2 \\ S_4 &= 2\pi R dx \end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned} f_{41} &= -\frac{R}{2} \frac{\partial f_{1x}}{\partial x} \\ f_{42} &= \frac{R}{2} \frac{\partial f_{2x}}{\partial x} \end{aligned}$$

En se limitant à la conservation de l'énergie pour la seule surface 4, alors le corps fermé est délimité par les disques 1 et 2, le cylindre 3 ainsi que l'anneau (4), soit :

$$f_{41} + f_{42} + f_{43} + f_{44} = 1$$

Le facteur de vue cherché s'exprime donc :

$$f_{43} = 1 + \frac{R}{2} \frac{\partial f_{1x}}{\partial x} - \frac{R}{2} \frac{\partial f_{2x}}{\partial x} - f_{44}$$

Or, le caractère infinitésimal de l'anneau nous autorise à négliger f_{44} :

$$f_{43} = 1 + \frac{R}{2} \frac{\partial f_{1x}}{\partial x} - \frac{R}{2} \frac{\partial f_{2x}}{\partial x} \quad (78)$$

CHAPITRE III

En utilisant l'expression du facteur de vue entre deux disques utilisées précédemment (équation (73)), qui se décline ici en facteur de vue du disque 1 sur le disque x (soit f_{1x}) distants de x, et facteur de vue du disque 2 sur le disque x (soit f_{2x}) distants de $h - x$ nous déduisons :

$$f_{1x} = \frac{1}{2} [2 + (x/R)^2 - (x/R) \sqrt{(x/R)^2 + 4}]$$

$$f_{2x} = \frac{1}{2} [2 + ((h-x)/R)^2 - ((h-x)/R) \sqrt{((h-x)/R)^2 + 4}] .$$

Nous obtenons en remplaçant les expressions de f_{1x} et f_{2x} dans l'équation (78):

$$f_{43} = \frac{1}{2} \left(\frac{h+2R}{R} - \frac{(x/R)^2 + 2}{\sqrt{(x/R)^2 + 4}} - \frac{((h-x)/R)^2 + 2}{\sqrt{((h-x)/R)^2 + 4}} \right) \quad (79)$$

La connaissance de f_{33} & f_{43} , permet ensuite d'exprimer pour un anneau le flux de chaleur rayonné à l'intérieur (ϕ_4), en fonction de la position x.

En vertu des règles (58), (59) et (60) permettant de calculer les flux net, nous exprimons celui de l'anneau :

$$q_4 = q_4^p - q_4^i$$

Ainsi au système d'équations des flux de chaleur partants établis lors de la modélisation globale vient s'ajouter :

$$q_4^p = \sigma \epsilon T_4^4 + (1 - \epsilon) q_4^i$$

dont on déduit :

$$q_4 = \sigma \epsilon T_4^4 - \epsilon q_4^i$$

Au système d'équation des flux de chaleur incidents de la modélisation globale vient s'ajouter :

$$q_4^i = f_{41} q_1^p + f_{42} q_2^p + f_{43} q_3^p$$

Le flux partant de l'anneau vers les autres surfaces est négligé. Le calcul à partir de ces systèmes d'équations mène à l'expression du flux net rayonné par l'anneau :

$$q_4 = \sigma \epsilon \left(\frac{(1 + f_{33}(\epsilon - 1))(T(x)^4 - T_{amb}^4) + \epsilon f_{43} \overline{Tc}^4}{(1 + f_{33}(\epsilon - 1))} \right) \quad (80)$$

En considérant la surface d'échange de l'anneau, nous obtenons une expression analytique du flux de chaleur rayonné par un anneau à la position x , en fonction de la température $T(x)$ et de la température moyenne de la bobine \overline{Tc} :

$$\Delta \Phi_{int}^{ray} = \sigma \epsilon \Delta S_{ext} \left(\frac{(1 + f_{33}(\epsilon - 1))(T(x)^4 - T_{amb}^4) + \epsilon f_{43} \overline{Tc}^4}{(1 + f_{33}(\epsilon - 1))} \right) \quad (81)$$

5. Calcul numérique d'évolution de la température

Maintenant que pour chaque mode de transfert de chaleur nous avons une expression analytique du flux global ou local, il reste à rassembler ces expressions pour exprimer le modèle thermique complet de l'inductance à air. Le modèle thermique global est exprimé par l'équation (82), le modèle thermique local est exprimé par l'équation (83). Le calcul de ces modèles nécessite une routine de recherche de zéro d'une fonction, qui peut être réalisée à l'aide des fonctions de Matlab [20]. La procédure doit d'abord déterminer la température moyenne :

$$P = \Phi_{ext}^{conv} + \Phi_{int}^{conv} + \Phi_{ext}^{ray} + \Phi_{int}^{ray} \quad (82)$$

L'expression des pertes (P) est donné par l'équation (64), les flux convectifs de la surface extérieur Φ_{ext}^{conv} et de la surface intérieure Φ_{int}^{conv} sont liés par l'équation (68). Le flux radiatif de la surface extérieur Φ_{ext}^{ray} et le flux radiatif de la surface intérieur Φ_{int}^{ray} sont respectivement calculés par les équations (71) et (77).

Ainsi, la résolution numérique de cette équation pour les conditions d'utilisation (I_{eff} , T_{amb} , etc....) fournit la valeur de \overline{Tc} . Cette température sert alors de support à l'évaluation de la température en fonction de la position sur la bobine. La résolution numérique de l'équation pour plusieurs positions de l'anneau ($0 < x < H$) fournit le profil de température $T(x)$:

$$P(T(x)) = \Delta\phi_{ext}^{conv} + \Delta\phi_{int}^{conv} + \Delta\phi_{ext}^{ray} + \Delta\phi_{int}^{ray} \quad (83)$$

L'expression des pertes ($P(T(x))$) est donnée par l'équation, les flux convectifs de la surface extérieure $\Delta\Phi_{ext}^{conv}$ et de la surface intérieure $\Delta\Phi_{int}^{conv}$ sont liés par l'équation (70). Le flux radiatif de la surface extérieure $\Delta\Phi_{ext}^{ray}$ et le flux radiatif de la surface intérieure $\Delta\Phi_{int}^{ray}$ sont respectivement calculés par les équations (72) et (81).

6. Présentation du banc de mesure

La partie expérimentale comporte deux approches. La première permet de mettre en évidence des résultats ou de vérifier certaines hypothèse, en se focalisant sur un composant, la seconde permet de vérifier la validité de la modélisation et consiste en une batterie d'essais qui porteront sur un grand nombre de composants de dimensions géométriques différentes. L'axe de la bobine est en position vertical, à 5cm de hauteur du plan de la table. Les mesures auxquelles est confronté le modèle ont été en partie réalisées au CETHIL [21]. Les mesures d'appoint ont été effectuées au LEM. Le banc d'essai est celui de la **Figure 35** :

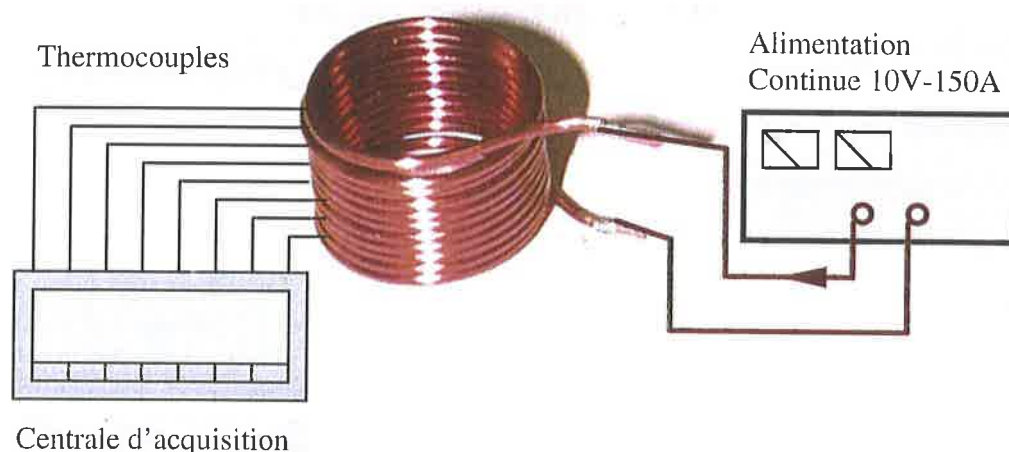


Figure 35 : Mesures de température par thermocouple.

L'alimentation en continu permet de connaître sans difficulté les pertes dans le composant. Pour des diamètres de fils élevés l'alimentation devra débiter des courants de l'ordre de 100A. L'alimentation utilisée est une NEMIC-LAMBDA PLVS-1500-10, pouvant délivrer des courants de 0 à 150A sous une tension de 0 à 10V. Les thermocouples sont de type K, et résultent de l'association chromel - alumel, leurs caractéristiques sont :

- une grande sensibilité : $40\mu V \cdot ^\circ K^{-1}$,

CHAPITRE III

- température maximale : 200°C.

Les thermocouples sont réalisés au laboratoire, la réalisation est rendue difficile par la finesse des fils (7/100 mm). Il est également difficile d'assurer un bon contact entre le thermocouple et l'objet, nous avons parfois dû recourir à un perçage de faible diamètre dans le matériau. Le thermocouple est placé dans le trou et fixé par un point de colle, bien que par ses propriétés isolantes la colle perturbe légèrement la mesure.

La centrale d'acquisition Eurotherm Chessel type 4100G possède 16 voies d'acquisition, une période d'acquisition de 1 seconde. Les mesures peuvent être enregistrées sur disquette puis lues dans EXCEL.

7. Vérification expérimentale

En guise de préliminaires à la vérification expérimentale, des mesures de températures ont été réalisées à l'intérieur des conducteurs afin de vérifier l'hypothèse de la non homogénéité de la température entre les spires. Les thermocouples sont logés dans les trous faits dans les conducteurs. Les trous sont de diamètre 0.3mm, et d'une profondeur de 0.5mm, le diamètre de conducteur étant de 2mm. La bobine testée a les caractéristiques suivantes : $N=11$ spires ; $D_e=37\text{mm}$; $d_c=2\text{mm}$. Un thermocouple est placé dans une spire sur deux, soit aux spires 2, 4, 6, 8 et 10. Sur la **Figure 36**, les relevés de température lorsque le régime stationnaire est atteint, montrent que la spire à $N=2$ est à la température la plus basse (38.5°C), et la spire à $N=10$ est à la température la plus haute (44.5°C). Lorsque le régime est établi, la différence de température entre la spire à $N=2$, et la spire à $N=10$ est de 6°C. On vérifie ainsi que la température dans le bobinage n'est pas homogène.

En outre, ce relevé nous donne un avant-goût de l'étude instationnaire. Lorsque la température croît, la pente des courbes des différentes spires est initialement rigoureusement identique. En effet, cette pente est proportionnelle aux sources de chaleur locales, cette propriété a été utilisée pour remonter à la résistance alternatif d'une inductance à air dans [22]. En continu les sources de chaleur sont homogènes dans l'ensemble du composant, ce qui justifie que les pentes soient les mêmes.

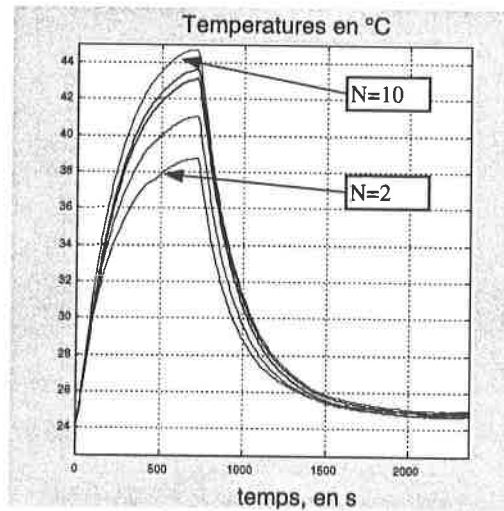


Figure 36 : Relevé dynamique de température à différentes hauteurs du bobinage, $I=15A$.

8. Résultats

a) Premiers résultats : Bobine $N=27$; $D=40mm$; $dc=4mm$

Le modèle est comparé aux mesures effectuées sur plusieurs bobines, pour différentes intensités. La température ambiante lors des essais était de $24^{\circ}C$. Nous avons utilisé, pour les paramètres du modèle, les valeurs suivantes :

$$T_{amb} = 297^{\circ} K, \rho = 1.69 \times 10^{-8} \Omega.m \text{ à } 20^{\circ} C, \alpha = 0.0043 \Omega.m.^{\circ} K^{-1}$$

Pour une bobine dont le fil de cuivre est de diamètre 4mm, de diamètre moyen $D=40mm$, comportant 27 spires, alimentée par un courant continu d'intensité $I=80A$, les résultats sont représentés à la Figure 37. Les résultats sont très proches en valeur moyenne, et l'évolution de la température en fonction de la position du modèle est également proche des relevés. Toutefois, le modèle ne restitue pas parfaitement la décroissance de la température au sommet de la bobine. Cette décroissance est accentuée par la convection sur le sommet de la spire, lequel n'a pas été considéré dans notre modélisation. Il serait possible d'améliorer la modélisation du rayonnement intérieur en rajoutant une couche supplémentaire à l'évaluation du rayonnement intérieur. Pour cela il faudrait mémoriser cette évolution de la température, et calculer pour chaque position le rayonnement entre l'anneau et la bobine, avec non plus la valeur moyenne de la température, mais l'évolution obtenue ci-dessous.

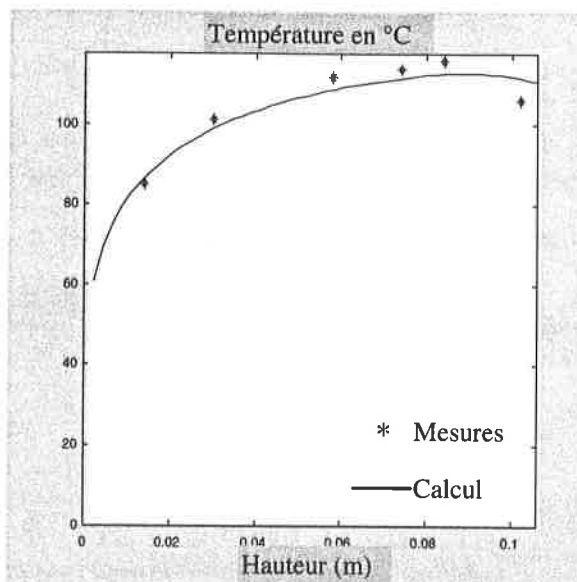


Figure 37 : Répartition de la température sur une bobine : $N=27$ spires ; $D=40$ mm ; $dc=4$ mm, en fonction de la hauteur.

Il faut noter qu'il existe une incertitude d'une part sur la mesure par thermocouple due au contact thermocouple - surface de mesure et, d'autre part sur la modélisation puisque les coefficients de convection sont définis à partir de corrélations qui revêtent un fort caractère empirique. Il convient donc de relativiser l'apparente coïncidence entre les mesures et la modélisation.

b) Bobine : $N=11$; $Di=33$ mm ; $dcu=2.1$ mm

Sur la **Figure 38**, trois courbes distinctes correspondent à 3 intensités, soit pour $I=5$ A ; $I=15$ A ; $I=30$ A. Ces courbes représentent la température en °C (ordonnées) calculées en fonction de la position sur la hauteur (abscisse). Les mesures effectuées dans les mêmes conditions sont représentées par : '*'.

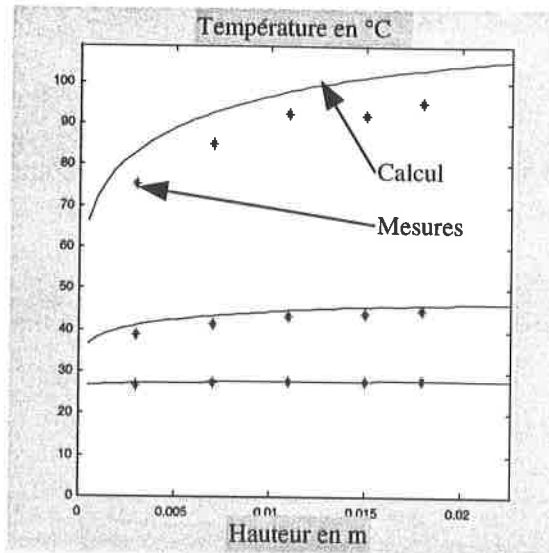


Figure 38 : Répartition de la température, bobine $N=11$ spires ; $D=33$ mm ; $dc=2.1$ mm

c) Bobine : $N=20$; $D_{int}=116$ mm ; $dcu=4$ mm

Ci-dessous les résultats pour une bobine de diamètre intérieur 120mm, comportant 20 spires de conducteurs de diamètre 4mm. De la courbe la plus basse à la plus haute l'intensité du courant électrique varie de 40A à 90A par pas de 10A. Le rapport hauteur sur diamètre, qui nous semble digne d'intérêt pour apprécier la plage de validité du modèle, est de : 2/3. L'erreur a été calculée selon : $\varepsilon = (T_m - T_c) / T_m$, ou T_m représente la température mesurée, et T_c la température calculée, en °C. **L'erreur absolue** sur la température locale est inférieure à 7%, sur l'ensemble de la gamme.

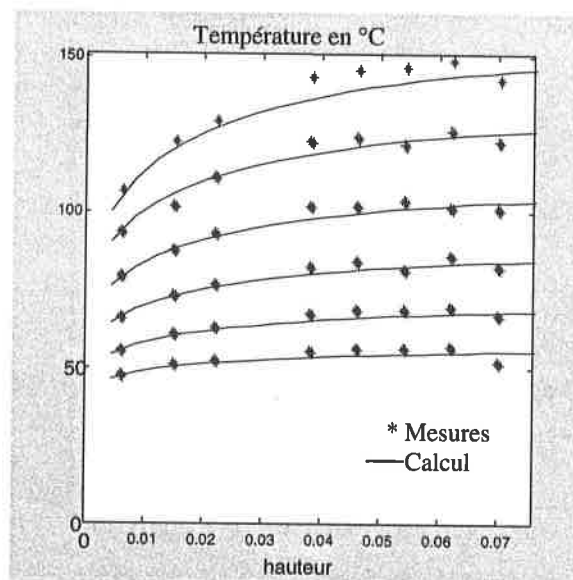


Figure 39 : Répartition de la température, bobine $N=20$ spires ; $D=116$ mm ; $dc=4$ mm.

CHAPITRE III

d) Bobine : $N=10$; $D_{int}=116$; $dcu=4mm$

Ci-dessous les résultats obtenus pour une bobine dont le rapport hauteur sur diamètre est de 1/3. De la courbe la plus basse à la plus haute l'intensité du courant électrique varie de 40A à 90A par pas de 10A.

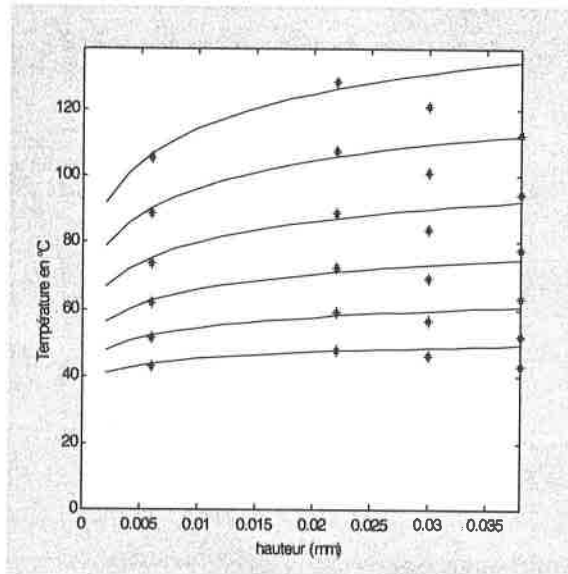


Figure 40 : Répartition de la température, bobine $N=10$ spires ; $D=116$ mm ; $dc=4$ mm.

e) Bobine : $N=27$; $D_{int}=36$; $dcu=4mm$

Ci-dessous les résultats obtenus pour une bobine dont le rapport hauteur sur diamètre est de 3. De la courbe la plus basse à la plus haute l'intensité du courant électrique varie de 30A à 80A par pas de 10A.

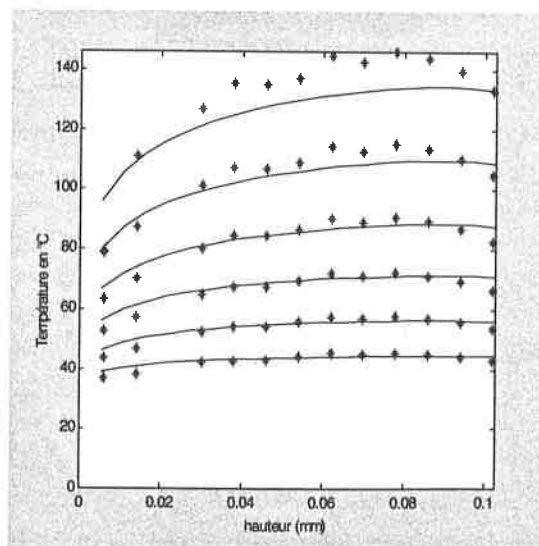


Figure 41 : Répartition de la température, bobine $N=27$ spires ; $D=36$ mm ; $dc=4$ mm.

9. Conclusion quant à la validité du modèle

On constate que le modèle analytique rend parfaitement compte du comportement thermique, de la bobine lorsque chacune des variables du modèle évolue de manière absolue : I , N , D , dcu , ou de manière relative : rapport hauteur/diamètre. Toutefois il est nécessaire de connaître les variables dimensionnelles précisément. Une lacune subsiste concernant la modélisation fine du rayonnement, puisqu'on constate bien souvent une décroissance de la température au sommet de la bobine, qui n'est pas forcément représenté par le modèle. En effet, l'hypothèse de calcul du rayonnement intérieur local est basée sur le calcul du rayonnement sur la bobine à température moyenne initialement homogène. Il conviendrait de réitérer le calcul du rayonnement une fois le profil de température obtenu, mais nous ne disposerions pas pour cela d'un modèle analytique. En outre les mesures effectuées au sommet de la bobine semblent souvent de valeur inférieures aux points qui les précèdent, ceci s'explique aussi par un échange convectif supplémentaire vers le haut qui privilégie donc la spire la plus haute. En effet une position défavorable des thermocouples placés au sommet conduit à une mesure de température dans la couche d'air et non plus sur la surface du conducteur.

D'après les résultats obtenus, il semble qu'un bobinage de faible rapport hauteur sur diamètre permette de meilleurs échanges de chaleur avec l'extérieur. En effet, pour un même courant, ces bobines semblent subir une élévation de température moindre. Cependant à la lueur des modèles, ceci peut être justifié. D'une part l'expression du coefficient de convection local (69) montre que la convection est d'autant meilleure que la hauteur est faible. D'autre part la configuration la plus favorable au rayonnement intérieur serait, en accord avec (75), une bobine plate.

C. Étude thermique d'une inductance à noyau torique

1. Description physique et géométrique de l'inductance à noyau torique

Dans le chapitre précédent, nous avons proposé un modèle thermique d'une inductance à air. Cependant les inductances à air trouvent très peu d'utilisation en raison de leur désagrément, en particulier car leur rayonnement électromagnétique peut-être perturbateur. On utilise donc des structures comportant un noyau qui permet de canaliser le flux d'induction magnétique vers un entrefer dans lequel est stocké l'énergie. Il apparaît que la localisation de l'entrefer est souvent source de pertes Joule supplémentaires. Des matériaux à entrefer réparti, tels que les poudres de fer, permettent de s'en affranchir. La modélisation d'un composant magnétique est délicate, mais peut être menée, pour certaines géométrie, en considérant des corps à température homogène [23]. Nous allons nous intéresser à la modélisation thermique d'une inductance dont le noyau est un tore en poudre de fer (une photo le représente à la figure 3 du chapitre I). Ainsi, nous bénéficierons de certains résultats obtenus pour l'inductance à air, et nous mènerons une modélisation thermique globale. Afin que le caractère de cette étude reste général, nous étudierons une inductance à noyau torique comportant une couche complète au maximum. Le composant sera étudié en position verticale, soit son axe de symétrie dans le sens de l'attraction de la pesanteur.

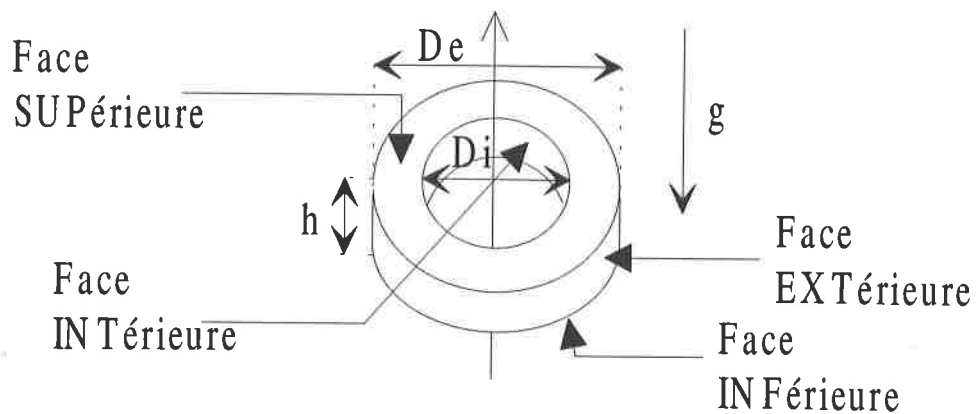


Figure 42 : Noyau torique d'axe vertical : notation des surfaces.

CHAPITRE III

Rappelons les notations employées pour décrire la géométrie. Celles-ci sont explicitées à la figure 2 du chapitre I.

d_c = diamètre du conducteur de cuivre,

N = nombre de spires,

h = hauteur du tore,

D_e = Diamètre extérieur du tore,

D_i = Diamètre intérieur du tore,

δ = distance moyenne entre les conducteurs et le noyau

La qualité d'une modélisation thermique dépend du niveau de représentation des phénomènes de transfert de chaleur (conduction, convection et rayonnement) mais également de la définition des surfaces sur lesquelles se développent ces transferts. Les surfaces du composant sont divisées en 4 : les surfaces extérieure, intérieure, supérieures et inférieures. Nous considérons les surfaces sur lesquelles nous supposons que se développent les échanges. Pour le noyau la surface considérée, est alors la surface du noyau ôtée de "l'ombre" que lui font les conducteurs.

Expressions des surfaces du noyau échangeant avec l'extérieur :

$$S_{sup}^n = S_{inf}^n = \frac{\pi}{4} (D_e^2 - D_i^2) - Nd_c \left(\frac{D_e - D_i}{2} \right) \quad (84)$$
$$S_{ext}^n = \pi D_e h - Nhd_c$$
$$S_{int}^n = \pi D_i h - Nhd_c$$

Expressions des surfaces des conducteurs échangeant avec l'extérieur :

$$S_{sup}^c = S_{inf}^c = Nd_c \left(\frac{D_e - D_i}{2} + 2d_c \right) \quad (85)$$
$$S_{ext}^c = S_{int}^c = Nd_c (h + 2d_c)$$

Expression de la surface totale en vis à vis entre les conducteurs et le noyau :

$$S_{cn} = 2Nhd_c + Nd_c (D_e - D_i)$$

Les expressions des volumes respectifs de cuivre et de fer sont également utiles :

$$V_n = \frac{\pi}{4} (D_e^2 - D_i^2) h$$

$$V_c = N \frac{\pi}{4} d_c^2 (D_e - D_i + 2h + 2d_c)$$

La description physique du composant va nous permettre d'évaluer la quantité de chaleur à évacuer. Lorsque le bobinage est traversé par un courant continu, il est le siège de pertes par effet Joule. Dans ce cas le noyau ne génère aucune perte (pas de champ alternatif) :

$$P_c = 1.69 \times 10^{-8} (1 + 0.0043(\bar{T}_c - 293)) \frac{N(D_e - D_i + 2h + 2d_c)}{\frac{\pi}{4} d_c^2} I^2$$

Lorsque le courant est alternatif, les pertes par effet Joule peuvent être évaluées à partir de la relation (24) du chapitre I, et les pertes dans le matériau magnétique (ceci a été décrit au chapitre I) peuvent être exprimées à l'aide d'une formule empirique proposée par le fabricant [24]:

$$P_f = 10^3 (a B_g^c f^d) V_n \quad (86)$$

Soit le champ d'induction en Gauss (Bg). La valeur maximale du champ d'induction en Teslas (B) avec $B_g = 10^4 B$ peut être déduite des valeurs des grandeurs électriques, puisqu'en sinusoïdal, la loi de Lenz s'écrit :

$$U = 4.44 B N S f \quad (87)$$

2. Modélisation de la conduction

La modélisation de la conduction thermique s'avère être complexe lorsqu'on souhaite s'y intéresser localement. Pourtant, ce sont les conditions d'échange sur les surfaces qui imposeront l'essentiel de la valeur de la température, au sein du matériau, d'autant plus lorsque la conduction thermique est négligeable. C'est pourquoi nous nous limitons à une résistance thermique globale du corps qui s'avère négligeable.

CHAPITRE III

- A partir de l'étude effectuée sur l'inductance à air, nous négligeons la résistance thermique dans une section de conducteurs.
- La symétrie de révolution du composant nous amène à considérer la température du noyau indépendante de la position angulaire sur le noyau et donc la température identique entre spires.
- D'après l'équation (38) nous pouvons estimer la résistance thermique entre le centre du noyau et sa surface, en supposant sa section circulaire :

$$R_{cond}^n = \frac{l}{2\pi^2 \lambda_n (De + Di)} \quad (88)$$

Cette résistance thermique est suffisamment faible pour que nous puissions considérer la température homogène dans le noyau (compte tenu des caractéristiques du noyau test $R_{cond}^n \approx 1.7^\circ K/W$, se reporter au **Tableau 2** pour la conductivité du noyau).

Les hypothèses précédentes nous permettent de focaliser notre effort de modélisation essentiellement sur la convection et sur le rayonnement, en accord avec [25] sur le fait de considérer le bobinage et le noyau comme des blocs isothermes de températures respectives T_c et T_n . Une représentation électrocinétique des échanges thermiques, facilite la représentation des échanges de chaleur (**Figure 43**). Ainsi, le système comporte deux sources de pertes, d'une part des pertes dans le noyau (P_f) et d'autre part dans les conducteurs (P_c). Deux températures sont à calculer, la température moyenne dans les conducteurs, et la température moyenne du noyau.

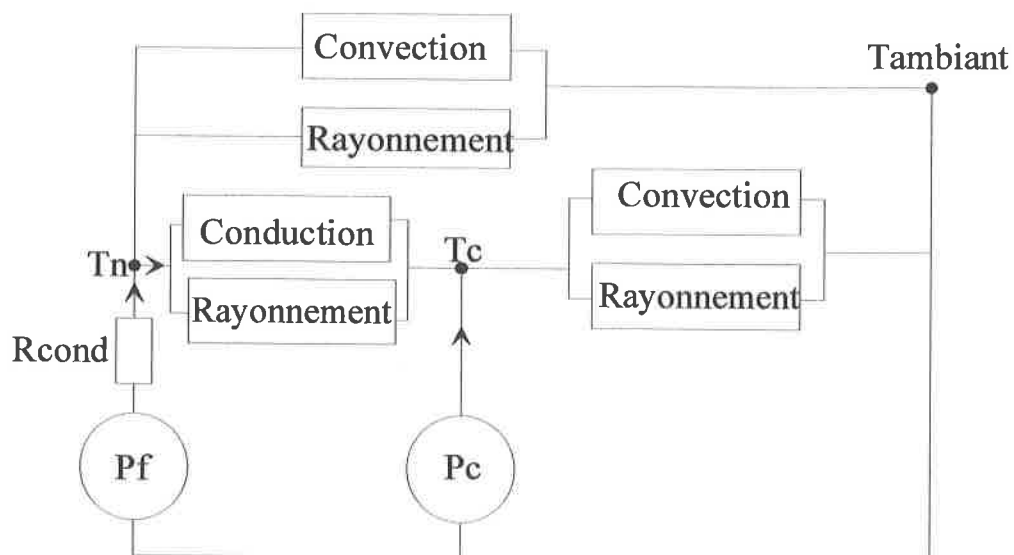


Figure 43 : Représentation électrocinétique des échanges de chaleur en régime stationnaire.

3. Modélisation de la convection

Le mouvement d'air qui est à la source de la convection sera de nature différente selon l'inclinaison de la paroi, et par conséquent n'aura pas les mêmes effets quantitatifs sur les échanges de chaleur, nous proposons d'en tenir compte dans la modélisation. Si on considère une paroi en position verticale le mouvement d'air se fera le long de la paroi, tandis que pour une paroi en position horizontale, l'air se déplacera du bas vers le haut avec probablement des effets de turbulence. En outre, en position horizontale, les faces supérieures et inférieures ne subiront pas les mêmes échanges convectifs. Ceci nous a amenés à proposer une modélisation par face, selon son inclinaison. Nous utiliserons des corrélations différentes mais néanmoins relativement simples, pour chacune des faces. Nous supposons, compte-tenu des dimensions de nos composants, que la convection à l'intérieur n'est pas perturbée et que le régime est laminaire. Les corrélations permettant d'évaluer la convection montrent une dépendance vis à vis de la longueur caractéristique de l'échange. Par exemple, dans le cas de l'inductance à air en position verticale, la longueur caractéristique était la dimension sur laquelle se développait la convection, soit la hauteur (Nd_c). Or, pour la face extérieure de l'inductance à noyau torique, selon que l'on considère le noyau, ou la spire, la hauteur de l'échange sera respectivement : h ou $h + 2d_c$ et les coefficients de convection s'exprimeront différemment. Les corrélations utilisées sont résumées dans le **Tableau 3**.

	Conducteur	Noyau
face verticale (extérieure ou intérieure)	$h_{ext}^c = h_{int}^c = 1.42 \left(\frac{\bar{T}_c - T_a}{h + 2d_c} \right)^{0.25}$	$h_{ext}^n = h_{int}^n = 1.42 \left(\frac{\bar{T}_f - T_a}{h} \right)^{0.25}$
face supérieure	$h_{sup}^c = 1.32 \left(\frac{\bar{T}_c - T_a}{(De - Di)/2 + 2d_c} \right)^{0.25}$	$h_{sup}^n = 1.32 \left(\frac{\bar{T}_f - T_a}{(De - Di)/2} \right)^{0.25}$
face inférieure	$h_{inf}^c = 0.66 \left(\frac{\bar{T}_c - T_a}{(De - Di)/2 + 2d_c} \right)^{0.25}$	$h_{inf}^n = 0.66 \left(\frac{\bar{T}_f - T_a}{(De - Di)/2} \right)^{0.25}$

Tableau 3 : Coefficients de convection.

De ces expressions combinées aux expressions des surfaces sur lesquelles portent l'échange (équations (84) pour le noyau et (85) pour les conducteurs), on déduit le flux de chaleur évacué par le noyau par convection, et le flux de chaleur évacué par convection du bobinage. On note $\phi_{convext}^n$ le flux surfacique de chaleur du noyau par convection sur la face extérieure. Pour les spires du bobinage il faut tenir compte de la surface réelle de l'échange que nous estimons à la demi surface supérieure, il faut donc multiplier par $\pi/2$, les expressions des surfaces des conducteurs pour estimer les surfaces d'échange.

$$\phi_{conv}^n = [(h_{sup}^n + h_{inf}^n)S_{sup}^n + h_{ext}^n(S_{ext}^n + S_{int}^n)](\bar{T}_f - T_a) \quad (89)$$

$$\phi_{conv}^c = [(h_{sup}^c + h_{inf}^c)S_{sup}^c + h_{ext}^c(S_{ext}^c + S_{int}^c)](\bar{T}_c - T_a) \frac{\pi}{2} \quad (90)$$

4. Modélisation du rayonnement

Lors de la modélisation thermique de l'inductance à air nous avons modélisé le rayonnement thermique en considérant les échanges radiatifs entre les surfaces, c'est à dire le rayonnement à l'intérieur de l'inductance à air. Plusieurs surfaces sont susceptibles d'échanger de la chaleur par rayonnement dans le cas de l'inductance à noyau torique, on peut ainsi recenser :

- l'échange des conducteurs vers l'ambient, ce flux est noté : ϕ_{ray}^{ca} ,
- l'échange du noyau vers l'ambient, ce flux est noté : ϕ_{ray}^{na} ,
- l'échange du "dessous" des conducteurs avec le noyau, noté : ϕ_{ray}^{cn} représenté schématiquement à la **Figure 44**,

CHAPITRE III

- l'échange des conducteurs vers le noyau sur la surface intérieure du tore, noté $\phi_{ray\ int}^{cn}$, par le biais des vis à vis entre les surfaces, illustré par la **Figure 45**,
- l'échange entre 2 conducteurs voisins,
- l'échange entre conducteurs sur la surface intérieure du tore, par le biais des vis à vis, ce flux est noté : $\phi_{ray\ int}^{cc}$, illustré par la **Figure 45**,
- l'échange du noyau sur lui même, par le biais des vis à vis, ce flux est noté : $\phi_{ray\ int}^{nn}$.

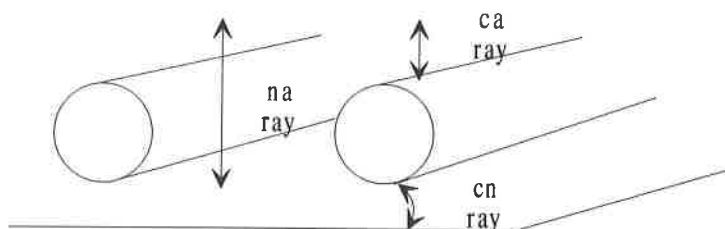


Figure 44 : Flux échangés par rayonnement entre le cuivre, le noyau et l'air.

Le bilan de tous ces flux permet d'exprimer le flux de chaleur rayonné par chacune des surfaces vers l'air ambiant d'une part, et entre elles d'autre part. A partir d'approximations raisonnables sur la géométrie, nous allons établir des expressions analytiques de ces différents flux, puis, à partir de calculs numériques, nous évaluerons leur impact.

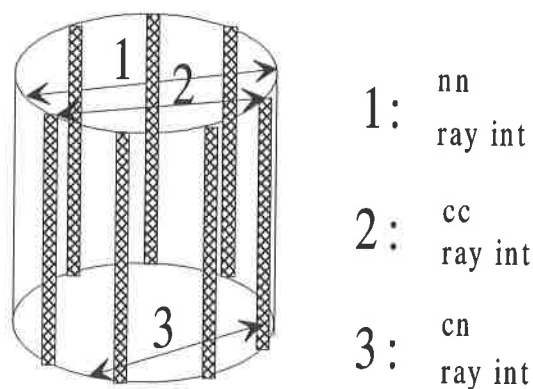


Figure 45 : Géométrie d'étude du rayonnement intérieur.

a) Flux de chaleur rayonnés par les faces supérieure, inférieure et extérieure

Pour modéliser le flux rayonné des conducteurs vers le noyau nous proposons d'adopter une hypothèse simplificatrice sur la géométrie, à savoir assimiler l'ensemble des "ombres" des conducteurs sur le noyau à la somme des ombres. Ceci conduit à la représentation de la **Figure 46** où la plaque (1) correspond à la surface développée du noyau, la plaque (2) à la

surface rassemblée des ombres des conducteurs et la plaque (3) à la surface d'échange du noyau avec l'air ambiant. Nous définissons ainsi trois surfaces, utiles pour les calculs :

$$S_1 = \frac{\pi}{2}(D_e^2 - D_i^2) + \pi D_e h$$

$$S_2 = N d_c (D_e - D_i + h)$$

$$S_3 = S_{ext}^n + S_{inf}^n + S_{sup}^n$$

Les facteurs de vue qui interviennent s'expriment : $f_{12} = \frac{S_2}{S_1}$ & $f_{13} = 1 - \frac{S_2}{S_1}$.

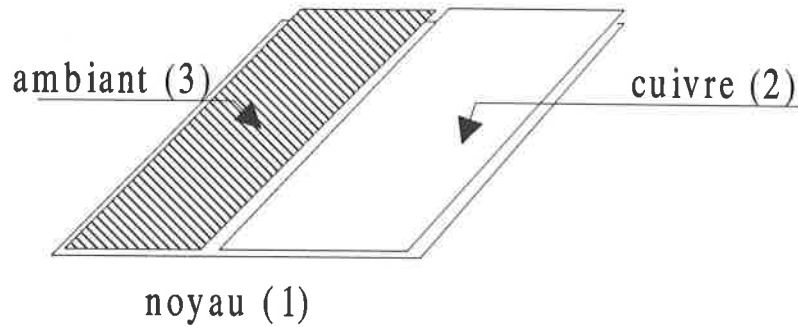


Figure 46 : Représentation des surfaces d'échange équivalentes.

Les calculs sont détaillés dans l'Annexe 4. Nous obtenons :

$$\phi_{ray}^{ca} = \sigma \epsilon_c (\bar{T}_c^4 - T_a^4) (S_{ext}^{cu} + 2S_{inf}^{cu})$$

$$\phi_{ray}^{na} = \sigma \epsilon_f S_1 \frac{f_{12} \epsilon_c (\bar{T}_f^4 - \bar{T}_c^4) + f_{13} (\bar{T}_f^4 - T_a^4)}{(1 - f_{12}(1 - \epsilon_f)(1 - \epsilon_c))}$$

$$\phi_{ray}^{cn} = \sigma \epsilon_c S_2 \frac{f_{13}(1 - \epsilon_f)(\bar{T}_f^4 - T_a^4) + \epsilon_f(\bar{T}_c^4 - \bar{T}_f^4)}{(1 - f_{12}(1 - \epsilon_f)(1 - \epsilon_c))}$$

b) Flux de chaleur rayonné par la face intérieure

Les expressions des surfaces des conducteurs et du noyau à l'intérieur du tore (surface du noyau ôtée de l'ombre du conducteur) sont : S_{int}^c et S_{int}^n . La géométrie concave à l'intérieur du tore induit des phénomènes de réflexion, des conducteurs sur eux mêmes, du noyau sur lui-même, ainsi que du noyau sur les conducteurs et vice-versa. Nous proposons d'essayer de modéliser ces phénomènes. Pour cela, la géométrie réelle doit d'abord être simplifiée et nous proposons la géométrie représentée par la Figure 45. Les calculs présentés à l'Annexe 5,

CHAPITRE III

permettent d'aboutir aux expressions suivantes des flux de chaleur surfaciques, dans lesquelles l'indice 3 est associé au bobinage, et l'indice 4 au noyau :

$$\phi_3^N = \sigma \epsilon_3 \frac{[(1-f_{33})(1+f_{44}(\epsilon_4-1)) + f_{34}f_{43}(\epsilon_4-1) - f_{34}\epsilon_4](T_3^4 - T_a^4) + f_{34}\epsilon_4(T_3^4 - T_4^4)}{(1+f_{33}(\epsilon_3-1))(1+f_{44}(\epsilon_4-1) - f_{34}f_{43}(1-\epsilon_3)(1-\epsilon_4))}$$

$$\phi_4^N = \sigma \epsilon_4 \frac{[(1-f_{44})(1+f_{33}(\epsilon_3-1)) + f_{34}f_{43}(\epsilon_3-1) - f_{43}\epsilon_3](T_4^4 - T_a^4) + f_{43}\epsilon_3(T_4^4 - T_3^4)}{(1+f_{33}(\epsilon_3-1))(1+f_{44}(\epsilon_4-1) - f_{34}f_{43}(1-\epsilon_3)(1-\epsilon_4))}$$

Les flux de chaleur pour l'ensemble des surfaces se déduisent alors des flux de chaleur surfaciques :

$$\phi_{cu\ int}^{ray} = \phi_3^N S_{int}^c$$

$$\phi_{fer\ int}^{ray} = \phi_4^N S_{int}^n$$

Ces équations font intervenir 4 facteurs de vue. A savoir le facteur de vue des conducteurs sur eux-mêmes (f_{33}) et sur le noyau (f_{34}) et réciproquement du noyau sur lui-même (f_{44}) et sur les conducteurs (f_{43}). L'origine des expressions analytiques précises de ces facteurs de vue est proposée dans l'**Annexe 5**, mais repose sur des hypothèses simplificatrices et des estimations de tendance :

$$f_{34} = \frac{S_4}{S_3 + S_4} \left(1 + 2 \frac{S_1}{S_3 + S_4} (f - 1)\right)$$

$$f_{43} = \frac{S_3}{S_3 + S_4} \left(1 + 2 \frac{S_1}{S_3 + S_4} (f - 1)\right)$$

$$f_{33} = \frac{S_3}{S_3 + S_4} f$$

$$f_{44} = \frac{S_4}{S_3 + S_4} f$$

Un fort couplage apparaît entre le bobinage et le noyau, il reste à déterminer le rayonnement entre ces deux parties. Comme précédemment, cela correspond à l'étude d'un sous système. Nous constatons par ailleurs la symétrie des deux équations.

Dans ces équations f représente le facteur de vue d'un cylindre sur lui même, son expression a été calculée pour le bobinage dans l'air (75), elle s'exprime ici :

$$f = 1 + [((h + dc) / (D_i - dc) - \sqrt{((h + dc) / (D_i - dc))^2 + 1}]$$

5. Les échanges entre noyau et conducteurs par conduction

Nous avons abordé en préliminaire à la modélisation thermique, la modélisation de la conduction thermique dans le noyau et dans les conducteurs. Il s'agit maintenant de quantifier les échanges entre le noyau et les conducteurs par conduction thermique dans l'air. Il se peut qu'il y ait des échanges d'origines diverses, tels que des phénomènes convectifs turbulents qui prennent naissance, mais une modélisation aussi sophistiquée nous semble hors sujet. Ainsi, nous nous intéressons à la conduction dans l'interstice d'air qui se trouve entre les conducteurs, et le noyau. Pour modéliser ce phénomène, il semble raisonnable d'utiliser une distance δ entre les conducteurs et le noyau, représentée à la **Figure 47**.

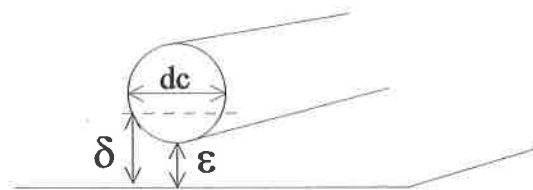


Figure 47

Cette distance rend compte d'un effet "moyen" pour la conduction dans l'air : $\delta = \epsilon + \frac{d_c}{4}$, puisque le contact, n'est pas ponctuel.... Nous utilisons la formule basique pour l'échange de chaleur par conduction :

$$\Phi_{cond}^{cn} = \lambda_{air}(\bar{T}) \frac{(2S_{ext}^{cu} + 2S_{sup}^{cu}) \frac{\pi}{2}}{\delta} (T_c - T_f) \quad (91)$$

6. Calcul numérique de la température

Nous avons établi des expressions pour chacun des flux qui interviennent dans l'évacuation de chaleur de l'inductance à noyau torique. La modélisation a été menée en considérant les échanges de chaleur par convection, conduction et rayonnement pour le noyau et pour les conducteurs. Ainsi, le bilan de ces flux vient balancer les pertes par effet Joule et les pertes fer. Le problème à résoudre numériquement est constitué de deux équations, dont les inconnues sont : T_c et T_f . Les expressions analytiques des pertes sont relativement fiables en continu, mais davantage sujettes à des erreurs en alternatif.

$$\begin{aligned}
 P_{\text{joules}} &= \Phi_{\text{conv}}^c + \Phi_{\text{ray}}^{ca} + \Phi_{\text{ray}}^{cn} + \Phi_{\text{cond}}^{cn} + \Phi_{\text{ray int}}^c \\
 P_{\text{fer}} &= \Phi_{\text{conv}}^n + \Phi_{\text{ray}}^{na} + \Phi_{\text{cond}}^{nc} + \Phi_{\text{ray int}}^n
 \end{aligned}
 \tag{92}$$

Pour la résolution numérique du système, il faut noter qu'en passant le second membre à gauche, l'écriture du système est modifiée. Le système à résoudre s'écrit alors de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
 f(\overline{T_c}, \overline{T_f}) &= 0 \\
 g(\overline{T_c}, \overline{T_f}) &= 0
 \end{aligned}$$

Les inconnues à trouver sont les températures du fer et du conducteur.

7. Vérification expérimentale

Rappelons quelques caractéristiques du composant qui sert de support à l'étude : $N=28$ spires ; $D_e=4.67$ cm ; $D_i=2.41$ cm ; $h=1.8$ cm ; $d_c=2$ mm ; $\delta=0.4$ mm.

L'instrumentation a été effectuée avec 8 thermocouples de type K. Les températures sont relevées par la centrale d'acquisition Eurotherm chessel de type 4100G. Des informations complémentaires ont été apporté au paragraphe 6 de la partie B de ce chapitre, lors de la présentation des mesures sur le bobinage.

Le banc de mesure utilisé pour les essais en alternatif est représenté sur la Figure 48, en haut de gauche à droite, l'oscilloscope LECROY 500MHz (résolution 100kpt) de type LC334 équipé d'une sonde de tension et d'une sonde de courant APO15 (30A du continu à 50MHz), puis les appareils de mesure pour les valeurs efficaces de la tension et du courant. En bas de gauche à droite : le GBF numérique, la centrale d'acquisition, l'inductance équipée de 8 thermocouples, l'amplificateur qui alimente l'inductance à noyau torique.

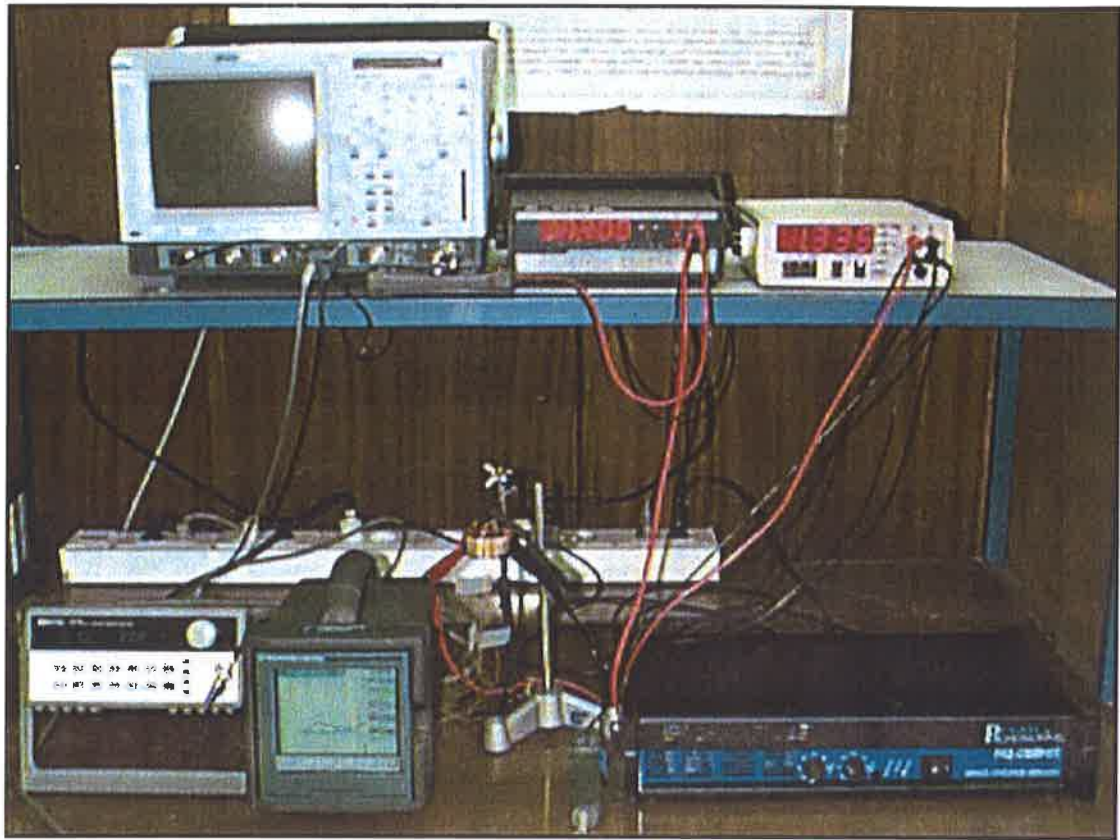


Figure 48 : Banc de mesure de température et alimentation.

Les essais en continu sont effectués pour diverses intensités du courant électrique de 0A à 25A par pas de A. Les résultats confrontant les calculs et les mesures sont rassemblés dans le

Tableau 4 :

Conditions de mesure		Températures mesurées (°C)		Températures calculées (°C)	
Intensité du courant (A)	Température ambiante (°C)	\bar{T}_c	\bar{T}_f	\bar{T}_c	\bar{T}_f
5	23.69	26.9	26.71	26.85	26.75
10	24.44	35.42	34.99	35.31	34.33
15	24.88	47.59	46.99	47.27	45.1
20	26.5	64.73	64.12	64.34	60.43
25	25.13	82.55	81.46	82.5	76.34

Tableau 4 : Comparaison entre les températures mesurées et calculées.

La comparaison des températures entre elles montre une bonne concordance entre le modèle et les mesures. Or, dans une procédure de dimensionnement, la température qu'il est souhaitable

de connaître est la température absolue de chacun des matériaux. La précision obtenue est satisfaisante en regard à notre intérêt final pour le dimensionnement. Toutefois, lorsqu'on s'intéresse à la précision relative à la différence de température entre le noyau et le bobinage, on constate que, malgré les efforts de modélisation de ces échanges, la différence de température mesurée reste bien plus faible que celle qui peut être calculée. Cet écart de température mesuré (1.09°K pour I=25A !) est aussi affecté par les différences entre les thermocouples utilisés pour la mesure. Or, pour séparer les pertes Joule des pertes dans le noyau, la qualité de la modélisation de cet échange est décisif. Mais, puisque l'échange de chaleur entre le noyau et le bobinage a été sous-estimé, on peut l'ajuster en modifiant les valeurs influentes de cet échange, en l'occurrence la distance entre le noyau et les conducteurs (δ). Ainsi, en prenant une valeur de 0.1mm pour δ , nous obtenons une différence de 1.2°K pour 25A, mais de seulement 0.1°K pour 5A (au lieu de 0.2°K mesuré). L'erreur est alors commise sur l'écart de température pour les faibles valeurs du courant. Cela nous amène à penser qu'au lieu d'agir sur des coefficients, il serait plus juste de modifier les lois de variations. En l'occurrence une loi linéaire comme celle représentant la conduction semble insuffisante pour modéliser l'échange de chaleur entre le noyau et les conducteurs.

8. Méthodologie de l'expérimentation

La vérification expérimentale, consiste à corréler les mesures de température effectuées sur un tore aux températures évaluées à partir de la modélisation thermique et ce, dans les mêmes conditions. Les températures sur lesquelles porte la vérification sont la température moyenne du noyau et la température moyenne des conducteurs, respectivement $\overline{T_f}$ et $\overline{T_c}$.

Ces températures moyennes sont le résultat de mesures de températures effectuées, au bout d'un temps suffisant pour que le régime stationnaire soit atteint, sur les faces extérieure, intérieure, supérieure et inférieure, tant sur le noyau que sur les conducteurs.

Les conditions qui doivent être communes aux mesures et au calcul sont la température ambiante, la part de pertes dans les conducteurs (P_{joule}) et la part de pertes dans le noyau (P_{fer} , nulle en continu). Ainsi, l'expérimentation requiert une mesure de la température ambiante et la séparation des pertes. Pour cela nous procédons à une mesure des pertes totales du composant, déduites par un simple produit courant - tension en continu et mesurées par la moyenne d'un produit courant - tension à l'aide d'un oscilloscope. Une équivalence entre température et pertes, fondée sur les mesures en continu, permet de confirmer les pertes

totales en alternatif. Les pertes dans les conducteurs sont calculées grâce à la relation (28) du chapitre I, du moins en alternatif. Les pertes dans le noyau sont déduits de la différence entre les pertes totales et les pertes dans les conducteurs. Les valeurs ainsi obtenues de P_{joule} et P_{fer} sont attribuées dans le système d'équations (92) afin de calculer les températures.

9. Équivalence thermique

La difficulté consiste à dissocier la part de pertes par effet Joule dans les conducteurs, et la part de pertes dans le noyau. Les pertes dans le noyau peuvent être calculées à l'aide des formules empiriques proposées par les fabricants. La connaissance des pertes totales, nous permet alors de déduire les pertes dans les conducteurs. Ensuite, la connaissance des parts respectives de pertes dans les matériaux nous permet d'éprouver la précision du modèle thermique stationnaire. Afin d'avoir une estimation des pertes totales, nous supposons que les mêmes pertes totales, indépendamment de leur répartition dans les conducteurs ou le noyau, provoquent la même élévation de température. Cette hypothèse est justifiée par la faible résistance thermique de couplage entre le noyau et les conducteurs, qui s'explique dans le **Tableau 4** par de faibles différences de température entre conducteur et noyau. On définit ainsi la température moyenne en surface du tore :

$$T_m = \frac{\overline{T_c} + \overline{T_f}}{2} \quad (93)$$

Nous qualifions cette approche d'équivalence thermique. La courbe de la **Figure 49** est la courbe d'équivalence thermique (ou calorimétrique). Elle présente les pertes totales en fonction de la température moyenne sur la surface du tore, et a été obtenue lors de mesures en courant continu sur un tore : $N=28$ spires ; $De=4.67$ cm ; $Di=2.41$ cm ; $h=1.8$ cm ; $dc=2$ mm.

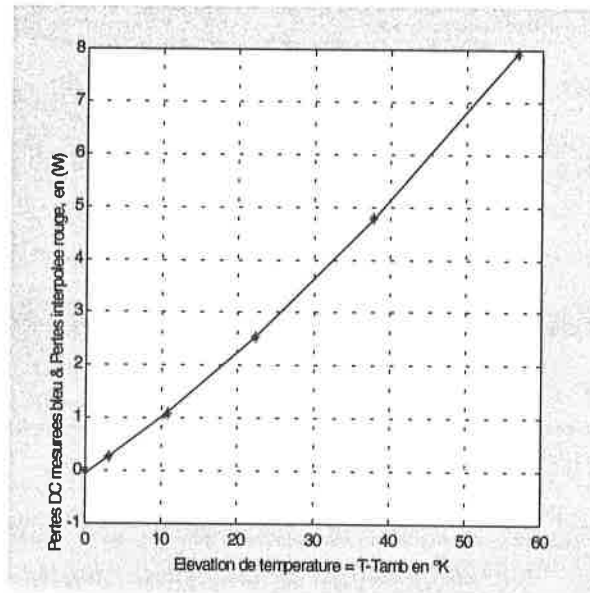


Figure 49 : Courbe d'équivalence thermique.

Les points de mesure sont obtenus pour des intensités du courant électrique de 0A à 25A par pas de 5A. Ainsi une corrélation simple entre les pertes totales (*Pertes*) en watts, et l'élévation de température (par rapport à la température ambiante soit $\Delta T = (T_m - T_{amb})$ en °K), s'exprime :

$$Pertes = 7.2 \times 10^{-4} \Delta T^2 + 9.92 \times 10^{-2} \Delta T - 0.0374 \quad (94)$$

10. Vérification expérimentale en alternatif

La vérification expérimentale en alternatif, consiste à corréler les mesures de température effectuées sur un tore aux températures évaluées à partir de la modélisation thermique et ce, dans les mêmes conditions. Les températures sur lesquelles porte la vérification sont la température moyenne du noyau et la température moyenne des conducteurs, respectivement $\overline{T_f}$ et $\overline{T_c}$.

Les conditions qui doivent être communes aux mesures et au calcul sont la température ambiante, la part de pertes dans les conducteurs et la part de pertes dans le noyau.

CHAPITRE III

a) Résultats

Les essais ont été effectués pour plusieurs fréquences et plusieurs tensions. Les pertes sont évaluées selon trois voies distinctes, la mesure à l'oscilloscope, la mesure résultant de l'équivalence thermique, les calculs respectifs des pertes dans le noyau et dans les conducteurs en alternatif.

FREQUENCE	50Hz	500Hz	5kHz	20 V	20 V	20 V
U : valeur efficace de la tension	0.9V	2 V	4 V	10 V	20 V	20 V
I : valeur efficace du courant	9.8A	2.1 A	3.7 A	1.32 A	2.19 A	0.39 A
P : pertes totales mesurées à l'oscilloscope	2.13W	0.8 W	3 W	2.03 W	7.8 W	1.12 W
P' : pertes totales calculées par équivalence thermique	2.31W	0.797 W	3.1 W	2.13 W	8.4 W	1.16 W
Pf : calculées (d'après (86))	1.55W	0.75 W	3.06 W	1.79 W	7.31 W	1.22 W
Pj (d'après éq. (28) du chap I)	0.98W	43 mW	0.142 W	24mW	74mW	6.6 mW
Ta : température ambiante (°C)	24.15	24.27	26.1	25.24	26.53	25.2
$\overline{T_c}$: mesurée (°C)	44.4	31.75	51	43.04	81.3	35.7
$\overline{T_c}$: calculée (°C)	43.5	32.4	50.63	42.99	79.26	36
$\overline{T_f}$: mesurée (°C)	45.5	32.72	54.77	46.03	92.09	37.1
$\overline{T_f}$: calculée	44.4	33.6	54.65	45.94	89.2	37.7

Tableau 5 : Résultats des températures et des pertes mesurées puis calculées pour le noyau et les conducteurs.

Il apparaît un faible désaccord entre les pertes fer déduites des mesures à l'oscilloscope et celles calculées par la formule (86), excepté pour 50Hz où la différence est plus importante. Cette différence peut provenir du fait que l'hypothèse du flux forcé n'est plus vérifiée à cette fréquence (i.e. $RI \ll U$), on peut estimer que la corrélation fournie par le constructeur est alors hors de sa gamme de validité. Or, pour comparer les résultats de la modélisation thermique aux mesures, il faut que les pertes soient identiques, nous nous sommes donc référés aux pertes totales mesurées à l'oscilloscope et aux pertes joules calculées en alternatif.

CHAPITRE III

Une modélisation entièrement analytique comprenant des pertes calculées donne également des résultats proches des mesures.

11. Conclusion

Dans ce paragraphe nous avons mené une modélisation analytique des échanges thermiques. Des hypothèses de départ nous ont permis de nous affranchir, ou de simplifier la conduction thermique. Nous avons alors détaillé la modélisation de la convection et du rayonnement en considérant la surface du noyau qui échange de la chaleur vers l'extérieur, la surface des conducteurs qui échangent de la chaleur avec l'extérieur, puis le couplage thermique entre le noyau et les conducteurs.

Ainsi, tant en continu qu'en alternatif la modélisation donne des résultats proches de ceux mesurés, l'erreur restant inférieure à 3% en alternatif et 7% en continu sur l'ensemble des mesures. Il convient de relativiser cette apparente précision, puisqu'en réalité il existe des erreurs sur les mesures effectuées par thermocouple. Par ailleurs, l'écart de température entre le noyau et les conducteurs obtenus par des mesure et par le modèle sont très proches en alternatif, mais moins bien modélisés en continu. Il n'est pas aisé de modéliser correctement l'échange de chaleur entre le noyau et les conducteurs. Nous avons imaginé que ce couplage pouvait être correctement modélisé en faisant intervenir le rayonnement échangé par les deux surfaces. Pour cela, nous avons du effectuer des hypothèses sur les surfaces qui échangent de la chaleur. Il s'avère que cela reste insuffisant pour rendre compte des écarts de température entre ces surfaces. Cette tentative de modélisation fine des échanges par rayonnement entre conducteurs et noyau apporte peu d'amélioration. En conséquence la modélisation peut être simplifiée en considérant la surface globale du composant.

D. Modèle thermique simplifié de l'inductance à noyau torique

1. Description de la modélisation simplifiée

Le modèle précédent modélise de manière satisfaisante le comportement thermique de l'inductance à noyau torique. Cette approche, que nous avons voulue proche des phénomènes physiques, nous a permis de nous familiariser avec ces phénomènes et leur méthode de calculs rarement exploitées en électrotechnique, comme le rayonnement entre des surfaces. Toutefois, l'énoncé du modèle est un peu long, même si les expressions sont assez simples, c'est pourquoi nous proposons des simplifications. La première consiste à définir une surface moyenne pour chacune des faces du composant, en utilisant une épaisseur équivalente à la couche de bobinage (e_B : épaisseur du bobinage équation (95) et surface moyenne équation (96)). La convection peut également être simplifiée, en ne considérant qu'une hauteur moyenne sur laquelle porterait l'échange (équations (97)). La modélisation permettra de rendre compte de la température moyenne de surface, notée T_m . La quantification du rayonnement sera simplifiée en considérant une émissivité moyenne, ce qui est justifié par le fait que l'émissivité équivalente des conducteurs est proche de celle du noyau. La modélisation du rayonnement de la face intérieure, fait intervenir le facteur de vue établi pour l'inductance à air :

$$e_B = \frac{1}{2} \left(D_i - \sqrt{D_i^2 - \frac{Ndc^2}{k_B}} \right) \quad (95)$$

$$S_{ext} = \pi (De + 2e_B)(h + 2e_B) \quad (96)$$

$$S_{int} = \pi (Di - 2e_B)(h + 2e_B)$$

$$S_{sup} = S_{inf} = \frac{\pi}{4} ((De + 2e_B)^2 - (Di - 2e_B)^2)$$

$$h_{sup} = 1.32 \left(\frac{T_m - Ta}{De - Di + 2e_B} \right)^{0.25} \quad (97)$$

$$h_{inf} = 0.66 \left(\frac{T_m - Ta}{De - Di + 2e_B} \right)^{0.25}$$

$$h_{ext} = h_{int} = 1.42 \left(\frac{T_m - Ta}{h + 2e_B} \right)^{0.25}$$

$$\Phi_{conv} = (h_{ext} S_{ext} + h_{int} S_{int} + h_{sup} S_{sup} + h_{inf} S_{inf}) (T_m - Ta) \quad (98)$$

$$\Phi_{ray} = \sigma \epsilon \left(S_{ext} + S_{inf} + S_{sup} + S_{int} \frac{1-F}{1+F(\epsilon-1)} \right) (Tm^4 - Ta^4) \quad (99)$$

$$F = \left(1 + \left(\frac{h}{Di - 2e_B} \right) - \sqrt{\left(\frac{h}{Di - 2e_B} \right)^2 + 1} \right)$$

Ainsi, le calcul numérique de la température moyenne de la surface du composant peut être obtenu par résolution numérique de l'équation (100) d'inconnue Tm.

$$P_{joules} + P_{fer} = \phi_{conv} + \phi_{ray} \quad (100)$$

2. Résolution numérique à partir du modèle thermique simplifié

Cette formulation simplifiée pourra être utilisée dans les routines d'optimisation, si sa précision est satisfaisante, ce que nous allons vérifier. Pour cela, comparons les mesures de température effectuées en continu sur le tore précédent, aux températures calculées à partir du modèle thermique simplifié. L'élément de comparaison sera la moyenne des relevés de températures entre le noyau et les conducteurs pour l'ensemble des faces. Les résultats sont rassemblés dans le **Tableau 6**.

Conditions de mesure		Températures mesurées (°C)	Températures calculées (°C)
Intensité du courant	Température ambiante	\overline{Tm}	\overline{Tm}
(A)	(°C)		
5	23.69	26.8	26.77
10	24.44	35.2	35.1
15	24.88	47.3	47
20	26.5	64.4	63.8
25	25.13	82.15	81.6

Tableau 6 : Comparaison entre les températures mesurées et les températures calculées à partir d'un modèle thermique simplifié lorsque le composant est alimenté en continu.

La même comparaison peut être menée à partir des résultats obtenus en alternatif :

Conditions de mesure		Températures mesurées & calculées (°C)		
Fréquence (kHz)	tension (V)	Température ambiante (°C)	$\overline{T_m}$	$\overline{T_m}$
			Mesure	Calcul
0.05	0.88	24.15	44.95	46.05
0.5	2	24.27	32.5	33.8
0.5	4	26.1	52.9	55.1
5	10	25.2	44.5	45.9
5	20	25.2	86.7	89.4
50	20	25.2	36.4	37.9

Tableau 7 : *Comparaison entre les températures moyennes mesurées et calculées lorsque le bobinage est alimenté en alternatif.*

Les températures calculées à partir modèle simplifié sont très proches des températures mesurées tant en continu que pour différents régimes de fonctionnement en alternatif. On constate cependant une faible dégradation de la précision par comparaison aux résultats obtenus pour le modèle complet. Ceci provient de la notion de température moyenne comme température de référence pour la comparaison. En effet, si cette notion est pratique, elle n'a pas de fondement rigoureux. Ceci peut se comprendre à la lueur de la représentation électrocinétique, puisque le passage de la **Figure 43** à une représentation pour laquelle il n'y aurait plus qu'une source de chaleur qui échangerait avec l'ambiant, n'est pas associé à un schéma équivalent. Les résultats sont néanmoins satisfaisants, et nous utiliserons cette modélisation pour l'optimisation.

E. Conclusion

Nous avons introduits, dans ce chapitre, les outils de la modélisation thermique stationnaire, en privilégiant le rayonnement entre surfaces, et la convection. Ces outils ont permis une modélisation qui s'est voulue rigoureuse et basée sur l'analyse des phénomènes physiques. La modélisation appliquée à l'inductance à air a mis en évidence le rayonnement à l'intérieur d'une surface cylindrique et l'éventualité d'une modélisation analytique locale. Le second objet d'étude, l'inductance à noyau torique, a bénéficié de certains résultats de la première étude comme le rayonnement intérieur, et a conduit aux prolongements concernant le calcul des échanges de chaleur par rayonnement entre un bobinage et son noyau. Cette dernière modélisation semble montrer que l'influence de ce rayonnement peut être négligé face au phénomène de conduction dans l'air. Cela nous a amenés à considérer une modélisation simplifiée destinée à une procédure de dimensionnement.

La vérification de la validité des modèles a nécessité un équipement spécifique à la mesure de température, et surtout l'acquisition d'un savoir faire de ce champ de la métrologie. Celui-ci reste vaste y compris pour les spécialistes.

La comparaison entre les mesures et les résultats de la modélisation a alors pu être établie autour des deux objets : le bobinage dans l'air alimenté en continu et une inductance à noyau torique pour différentes conditions de fonctionnement en continu et en alternatif. Il en est ressorti que ces efforts de modélisation n'avaient pas été vains puisque, sans aucun paramètre empirique, on parvient à prédire la température avec une erreur de moins de 10% environ.

Cette approche a mis en évidence un phénomène largement oublié qui est l'échange de chaleur par rayonnement entre surfaces. Celui-ci pourrait être déterminé pour des composants présents dans une même enceinte, en envisageant une modélisation au niveau du système.

Lors de cette étude s'est posée la question de la possibilité de remonter aux pertes à partir des mesures de température. L'étude du régime instationnaire, a révélé que c'était faisable à partir de mesures de l'évolution temporelle de la température. Cela fait l'objet du chapitre suivant.

F. Bibliographie

- [16] J. TAINE, J.P. PETIT, "TRANSFERTS THERMIQUES : Mécanique des fluides anisothermes", Dunod Université, 1989.
- [17] N. OZISIK "Heat transfer : a basic approach", Mac Graw Hill, 1985
- [18] J.F. SACCADURA "Initiation aux transferts thermiques", Lavoisier Tech & Doc, 1993
- [19] Y.PATIN, "Contribution à l'étude thermique et au dimensionnement des composants magnétique, pour l'électronique de puissance" Thèse de doctorat du LEM, Montpellier, 1998
- [20] Manuel MATLAB, User's guide, Signal Processing Toolbox, version 4, Mathworks inc., 1998.
- [21] S. FERRARI, S. REMEYSE, "Étude thermique d'une bobine", Projet de fin d'étude de l'INSA de LYON, juin 1998.
- [22] H. TISSOT, "Mise au point d'une plateforme d'essais pour bobinage en haute fréquence", Mémoire ingénieur CNAM, octobre 1991.
- [23] J.C.S. FAGUNDES, A.J. BATISTA, P. VIAROUGE, "Thermal modelling of pot core magnetic components used in high frequency", IEEE Transactions on magnetic, vol 33, n°2, pp. 1710-1713, mars 1997.
- [24] Catalogue n°4 Micrometals, Iron powder cores, "Power conversion and line filter applications", catalogue 4, 1995
- [25] F. TOURKHANI, P. VIAROUGE, J.C. FAGUNDES, "Comportement thermique et conception des composants magnétiques dans les convertisseurs statiques de fréquence élevée", IEEE Transactions, 1995.

Chapitre III : Etude thermique instationnaire

A. Présentation d'une méthode de calcul des sources de chaleur originale issue de la thermomécanique

1. Position du problème

D'une manière générale, la connaissance des pertes dans les matériaux constituant les composants de l'électrotechnique est difficilement accessible.

Dans le cas de l'inductance (mais également pour les machines, transformateurs, etc.), trois matériaux cohabitent : le cuivre du conducteur, le polymère de l'isolant et le fer du noyau magnétique. Nous considérons que seules les pertes intrinsèques du cuivre et du fer sont significatives. Si les mécanismes physiques à l'origine des pertes en hautes fréquences dans le cuivre et dans le fer sont bien connus, la détermination analytique quantitative de ces pertes dans un contexte tri-dimensionnel reste un problème délicat, a fortiori dans l'hypothèse éventuelle d'une excitation non - sinusoïdale. Or, ces pertes nous intéressent particulièrement dans l'estimation de l'élévation de la température. On pressent le lien intime qui unit la température et les pertes, que nous qualifierons par la suite de sources de chaleur (ce qui suppose que toute l'énergie consommée est transformée en chaleur).

Nous, électrotechniciens, ne sommes pourtant pas isolés sur l'îlot de la thermique, à nous préoccuper de la température de nos "petits". Les chercheurs du Laboratoire de Mécanique et Génie civil (LMGC) et plus particulièrement de l'équipe thermomécanique dirigée par A. Chrysochoos portent un grand intérêt à la thermique. Notamment dans le cadre de l'étude des Alliages à Mémoire de Forme (AMF), ils parviennent à remonter aux sources de chaleur dans un AMF, à partir de mesures de températures, mettant ainsi en évidence les processus prépondérants lors des changements de phase. Ils ont développés des outils d'analyse et d'expérimentation pour mener ces études, dont nous allons présenter les éléments qui nous intéressent.

2. Modélisation thermique instationnaire

Dans le cas particulier d'un système ne contenant que des corps opaques - ce qui est le cas des conducteurs et du noyau - baignés dans un milieu transparent, c'est le cas de l'air ambiant,

CHAPITRE III

l'évolution de la température T en un point d'un corps peut être représentée par un système d'équations (101) constitué par :

- une équation différentielle, nommée équation de la chaleur,
- des conditions aux limites, soit les échanges de chaleur sur les parois,
- des conditions initiales.

Considérons un repère cartésien dans lequel un point M est défini par ses coordonnées $\vec{r} = (x_1, x_2, x_3)$.

On note T_{amb} la température ambiante supposée constante et $T(r_j, t = 0)$ la température initiale du point de coordonnées r_j .

- $T|_s$ désigne la température de surface, et h est le coefficient d'échange avec l'extérieur, par convection et rayonnement,
- $p(\vec{r}, t)$ représente l'évolution temporelle des pertes volumiques au point $M(\vec{r})$,
- $\Delta T(\vec{r}, t)$ est le laplacien du champ de température.

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho C \frac{\partial T}{\partial t} - \lambda \Delta T(\vec{r}, t) = p(\vec{r}, t) \\ -\lambda \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_s = h(T|_s - T_{amb}) \\ T(r_j, t = 0) = T_{amb} \end{array} \right. \quad (101)$$

La première équation relie les évolutions temporelle et spatiale de la température du corps considéré aux expressions des sources de chaleur intrinsèques. La seconde équation caractérise les échanges sur les parois avec l'extérieur, à savoir la convection et le rayonnement qui ont fait l'objet du chapitre précédent. La troisième condition caractérise des conditions initiales. Nous noterons par la suite $\theta = T - T_{amb}$ l'élévation de température.

3. Outil de passage des températures aux sources de chaleur

CHAPITRE III

a) Présentation de l'outil

Remonter aux sources de chaleur à partir du modèle ainsi formulé nécessite la connaissance de la température dans le volume du composant. Cela nécessite une implantation des thermocouples au sein du composant, ce qui est difficile à mettre en œuvre et perturbateur pour le système. La méthode qui va être présentée permet de n'utiliser que des relevés de température en surface.

L'équipe de A. Chrysochoos a proposé et justifié dans [26] une simplification du problème différentiel (101). Ils montrent qu'il est possible de substituer une constante de temps $\tau_{\text{éq}}$ à une composante du laplacien du champ de température et échanges thermiques (ou "fuites thermiques"). Cette constante de temps est obtenue expérimentalement, en identifiant l'évolution temporelle de la température de surface du corps en phase de refroidissement à un premier ordre de constante de temps $\tau_{\text{éq}}$.

Supposons un corps pour lequel le champ de température est considéré comme homogène selon la direction x_1 , et substituons à T et T_{amb} , la variation de température θ . Il est montré dans [27] que le système différentiel précédent peut alors se ramener à l'équation (102) :

$$\rho C_p \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\theta}{\tau_{\text{éq}}} \right) - \lambda \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_3^2} \right) = p(\vec{r}, t) \quad (102)$$

Si la dimension x_1 correspond à l'épaisseur du corps et x_2, x_3 correspondent aux autres dimensions, on constate alors que la **mesure des températures de surface permet de remonter aux sources de chaleur dans le volume**. Dans de nombreux cas particuliers, on peut donner une expression de la constante de temps $\tau_{\text{éq}}$, en fonction de la géométrie, des propriétés du matériau (ρ, C) et du coefficient d'échange h . Ainsi, les conditions d'échange et une dimension du Laplacien sont remplacés par la constante de temps $\tau_{\text{éq}}$. Des éléments de la démonstration sont présentés dans le paragraphe suivant.

Lorsque la température est supposée homogène dans l'épaisseur, le problème à résoudre se simplifie considérablement [28] et se ramène alors à :

$$\left(\frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\theta}{\tau_{eq}}\right) = \frac{p(t)}{\rho C_p} \quad (103)$$

La constante de temps τ_{eq} rend compte des temps de transfert caractéristiques des trois phénomènes que sont la conduction, la convection et le rayonnement, dans l'hypothèse où la température est assez faible pour que ce dernier obéisse à une loi linéaire. Nous allons par la suite, expliciter l'origine de cette équation, et les hypothèses permettant de l'établir.

b) *expression de τ_{eq} en fonction du coefficient d'échange*

Dans [27], la relation entre la constante de temps et le coefficient d'échange de chaleur (conduction, convection, rayonnement) est établie. Toutefois, la démarche n'est pas entièrement exploitée car l'étude de la modélisation en régime permanent nécessitait un investissement en temps considérable. Dans notre contexte, l'adéquation est très bonne puisque les modélisations de régime permanent ont été établies dans le chapitre II. Ainsi, dans [27] il est proposé d'utiliser le calcul du coefficient d'échange avec l'extérieur pour prédéterminer la constante de temps τ_{eq} , en supposant cependant que la loi de rayonnement pouvait être supposée linéaire, ce qui était justifié par la gamme de température de leur problème (quelques degrés). Les températures de fonctionnement des composants magnétiques (60 à 120°C) sont au delà du domaine dans lequel la loi d'évolution du rayonnement peut être linéarisée. Toutefois l'erreur commise peut être faible, de telle sorte que nous puissions tout de même utiliser cette approche pour remonter aux sources de chaleur. Pour l'évaluer il nous faut formuler le lien entre la température en surface et les sources de chaleur, tout en prenant en compte les coefficients d'échange aux parois. Afin de mettre en évidence ce lien, nous supposons la géométrie du bobinage (représenté par la **Figure 28** du chapitre II) assimilable à un plan d'épaisseur d_c , de hauteur Nd_c , et de largeur πD . Nous nous référons au repère associé représenté sur la **Figure 50**. La fonction valeur moyenne sur l'épaisseur est définie par :

$$\bar{f} = \frac{1}{d_c} \int_0^{d_c} f(x_1, x_2, x_3, t) dx_1 \quad (104)$$

Par application de cet opérateur à l'équation de la chaleur on écrit :

$$\rho C_p \frac{\partial \bar{T}(x_2, x_3, t)}{\partial t} - \lambda \Delta T(x_2, x_3, t) - \lambda \frac{1}{d_c} \left[\frac{\partial T(x_1, x_2, x_3, t)}{\partial x_1} \right]_0^{d_c} = \frac{1}{d_c} \int_0^{d_c} p(x_1, x_2, x_3, t) dx_1$$

Ceci se simplifie quand le champ de température est considéré comme homogène dans le volume :

$$\rho C_p \frac{\partial \bar{T}(t)}{\partial t} - \lambda \frac{1}{d_c} \left[\frac{\partial T(x_1, t)}{\partial x_1} \right]_0^{d_c} = p(t)$$

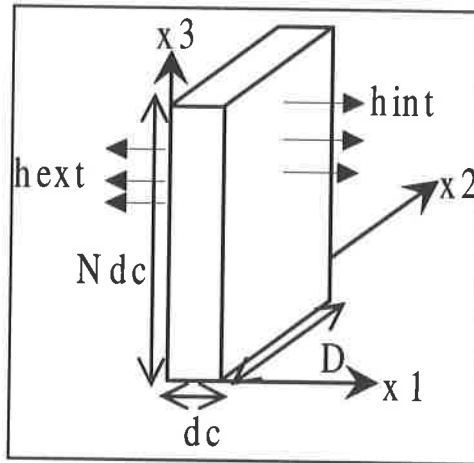


Figure 50 : Plaque équivalent à la géométrie d'un bobinage cylindrique déroulé.

Les conditions d'échange sur les parois, résultant de la convection et du rayonnement, qui s'écrivent, en $x_1 = 0$ et $x_1 = d_c$ sont représentées sur la Figure 50 par des flèches normales aux parois. Nous noterons h_{ext} et h_{int} les coefficients d'échange :

$$-\lambda \frac{\partial T(x_1 = 0)}{\partial x_1} = h_{ext} (T(x_1 = 0) - T_{amb})$$

$$-\lambda \frac{\partial T(x_1 = d_c)}{\partial x_1} = h_{int} (T(x_1 = d_c) - T_{amb})$$

Ces termes sont égaux au terme entre crochet de l'équation de la chaleur, et peuvent donc s'y substituer. Les coefficients d'échange h_{ext} et h_{int} sont décrits au chapitre II. Il est envisageable d'utiliser leurs expressions pour les insérer dans l'équation de la chaleur. Cette approche sera abordée ultérieurement. Dans un premier temps, on obtient :

CHAPITRE III

puisque $T(x_1 = 0) \approx T(x_1 = d_c) = T$:

$$\rho C_p \frac{\partial \bar{T}(t)}{\partial t} + \frac{l}{d_c} (h_{ext} + h_{int}) (\bar{T}(t) - T_{amb}) = p(t)$$

Lorsque l'hypothèse de linéarité est plausible, c'est à dire que le coefficient d'échange est indépendant de la température, on peut exprimer l'équation précédente en fonction d'une constante de temps :

$$\rho C_p \left(\frac{\partial \bar{T}(t)}{\partial t} + \frac{(\bar{T}(t) - T_{amb})}{\tau_{th}} \right) = p(t) \quad (105)$$

$$\tau_{eq} = \frac{\rho C_p d_c}{h_{ext} + h_{int}}$$

Nous retrouvons l'expression présentée équation (103), en notant que $\theta = T - T_{amb}$. L'équation ci dessus permet de calculer les pertes instantanées à partir d'un relevé de température en surface, de la mesure de la température ambiante et de l'identification de la constante de temps thermique.

B. Transposition de la méthode pour la mesure des pertes dans un bobinage

Nous avons vu qu'il était possible de déterminer la distribution des sources de chaleur (ou pertes) dans un corps, à partir de la connaissance locale de la température, et moyennant certaines hypothèses sur l'homogénéité des sources. Nous proposons d'appliquer cette méthode au bobinage qui a été étudié au chapitre précédent, afin de remonter aux pertes qui sont générées par effet Joule dans le conducteur

1. Principe du calcul des pertes (DC) dans un bobinage par identification de τ_{eq}

En négligeant les écarts de température entre les spires, et l'influence de l'isolant, nous assimilons la température locale du bobinage à sa température moyenne. Le Laplacien du champ de température est alors supposé nul, nous utilisons l'équation simplifiée (103). Toutefois, nous considérerons l'évolution temporelle des pertes sur l'ensemble du volume notée $P(t)$ ($= p(t) \times Vol$). L'équation que nous allons traiter, pour illustrer cette approche, est :

$$P(t) = \rho C \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\theta}{\tau_{eq}} \right) Vol \quad (106)$$

Par ailleurs, les sources de chaleur correspondant à l'effet Joule dû au parcours d'un conducteur de cuivre Joule sont aisément calculables (cf. chapitre II) :

$$P = 4 \times 1.69 \times 10^{-8} (1 + 4.3 \times 10^{-3} (\bar{T}_c - 293)) \frac{D}{d_c^2} NI_{eff}^2 \quad (107)$$

La puissance transformée en chaleur peut également être obtenue par une simple mesure de U et de I. Nous considérons en outre les pertes moyennes sur le volume, et fonction du temps à l'échelle des constantes de temps thermiques, et non électriques. Les échelles d'élévation de

CHAPITRE III

température trop grandes seront évitées afin de conserver l'hypothèse de linéarité du rayonnement.

2. Application de la méthode de calcul des pertes

La méthodologie employée est la suivante :

- dans un premier temps nous effectuons un relevé de la température instantanée en 3 points de la hauteur de l'inductance à air placée dans une position verticale,
- ensuite, nous calculons la moyenne de ces 3 températures, laquelle aura subi un filtrage numérique permettant de s'affranchir du bruit de mesure des thermocouples,
- puis nous identifions la constante de temps du retour à la température ambiante (τ_{eq}),
- enfin nous appliquons l'équation (106) pour calculer les pertes.

Il reste ensuite à comparer les pertes ainsi calculées à celles mesurées. Le banc de mesure utilisé est celui décrit à la **Figure 35** du chapitre II. Les fichiers de la centrale d'acquisition sont transférés sur disquette vers un PC.

a) Mesures de température et leur exploitation pour le calcul des pertes

Nous avons procédé à des relevés de température échantillonnés toutes les 5 secondes, en 3 points de l'inductance à air. Finalement, nous avons considéré la température spatiale moyenne instantanée. La figure ci-dessous représente ces températures à différentes hauteurs, soit avant la moyenne spatiale.

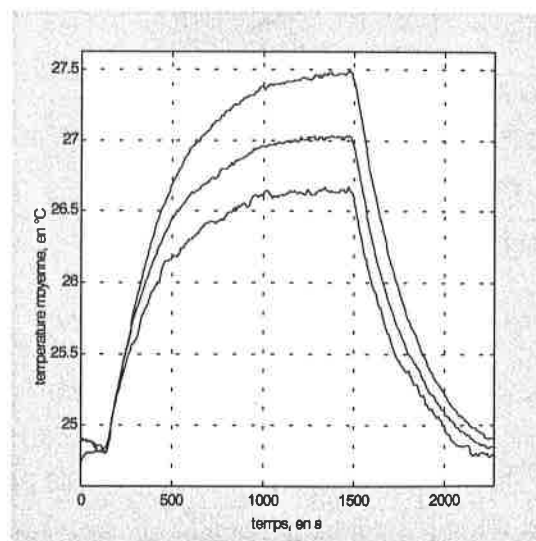


Figure 51 : Evolution temporelle de la température d'un bobinage ($N=11$; $D_i=33\text{mm}$; $d_c=2.1\text{mm}$, $I=5\text{A}$).

La constante de temps τ_{eq} est identifiée lors de l'extinction de l'alimentation qui conduit la température du composant au retour vers la température ambiante. En assimilant cette caractéristique à un premier ordre nous identifions une constante de temps :

$$\tau_{th} = 260 \text{ s}.$$

Ce relevé montre, pour différents points de la bobine, une croissance quasi - exponentielle de la température due à l'apparition des pertes, puis l'apparition d'un régime stabilisé au bout d'environ 750 secondes et jusqu'à 1500 secondes instant de l'extinction.

La phase de décroissance de la température correspond uniquement aux "fuites thermiques" avec l'extérieur. En effet, de la chaleur a été stockée et la température décroît au fil de son évacuation vers l'extérieur. Nous calculons les sources de chaleur instantanées, à partir des relevés de température de la **Figure 51** pour tout le volume à partir de l'équation (106). Le résultat de ce calcul est représenté sur la **Figure 52**.

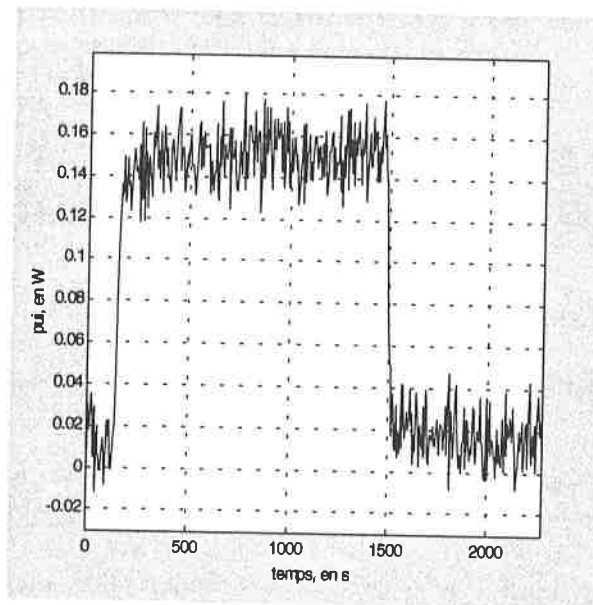


Figure 52 : Calcul des sources de chaleur à partir des relevés de température.

A partir de cette allure on retrouve que les sources de chaleur existent lorsque la température croît, et que les sources de chaleur sont nulles lorsque la température décroît, cela correspond effectivement au protocole expérimental, c'est à dire que le bobinage était alimenté de 100 secondes à 1500 secondes, puis déconnecté.

CHAPITRE III

On vérifie la quasi instantanéité de l'apparition et de l'extinction de la source, malgré un bruit de mesure persistant. De faibles variations de la température mesurée dues à des fluctuations de la convection, induisent, du fait de la dérivation de la température par rapport au temps, des fronts sur le calcul des pertes.

Les pertes sont comprises dans l'intervalle :

$$0.12 \text{ Watts} < P < 0.18 \text{ Watts},$$

mais le bruit interdit une lecture correcte de la puissance.

b) Filtrage des pertes

Le filtrage du signal peut permettre de révéler de façon plus précise les valeurs entre lesquelles sont comprises les pertes.

La fréquence de mesure est de 0.05 Hertz. En utilisant un filtre d'ordre 2 dont la fréquence de coupure est 10 fois plus petite que la fréquence d'échantillonnage, on peut espérer éliminer le bruit de la courbe sans détériorer la réponse indicielle. Nous proposons donc un premier filtrage par un filtre de Butterworth d'ordre 2, pour sa simplicité, de fréquence de coupure normalisée 0.005/0.05. Ce filtre appartient à la catégorie des filtres à réponse impulsionnelle infinie.

Les fonctions de traitement du signal proposées dans [29], se prêtent à ce genre d'opérations, le filtrage ainsi obtenu est présenté **Figure 53**.

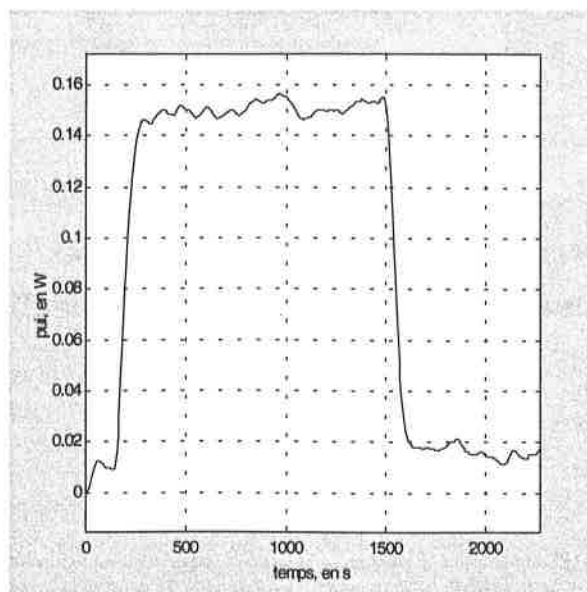


Figure 53 : Filtrage des sources de chaleur calculées.

Le signal filtré montre que les pertes sont comprises dans l'intervalle :

$$0.145 \text{ Watts} < P < 0.155 \text{ Watts} .$$

Cependant il existe un léger décalage de la courbe du fait d'une différence de mesure entre les thermocouples et l'ambient ainsi que de l'hypothèse de linéarité des échanges. Lors de la phase de retour à la température ambiante il apparaît un décalage d'environ 0.015 Watts, cette quantité peut être utilisée pour affiner le relevé. Cependant lorsque le problème requiert davantage de sensibilité, il est nécessaire de procéder à un étalonnage statique entre les thermocouples.

c) *Corrélation aux mesures électriques*

L'alimentation de la bobine a été effectuée en courant continu sous $U = 0.0286 \text{ Volts}$ et traversé par un courant d'intensité constante $I = 5 \text{ A}$. Lors de l'essai la température a évolué dans de faibles proportions (**Figure 51**), la résistivité n'a pas été modifiée et par voie de conséquence la tension est restée sensiblement constante (à la fin de l'essai $U = 0.0289 \text{ Volts}$). Dans ces conditions, le produit courant tension nous donne une estimation des pertes sur l'étendue de la mesure :

$$P = U \times I = 0.143 \text{ Watts}$$

Par ailleurs, nous pouvons à partir de l'équation (107) calculer les pertes par effet Joule, et ce, pour chaque température, puisque la résistivité varie en fonction de celle ci.

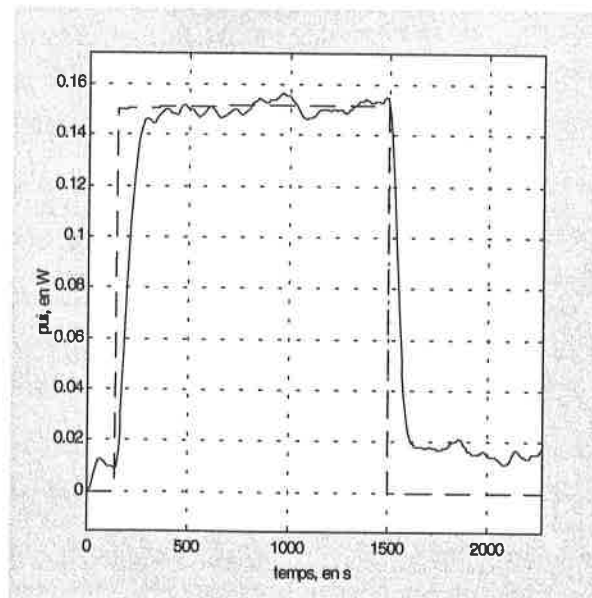


Figure 54 : Superposition des sources de chaleur filtrées et du produit UI (pointillés).

Le résultat de ce calcul (ligne interrompue bleue), présenté **Figure 54**, est superposé au calcul des sources de chaleur après filtrage (ligne ininterrompue rouge). On observe un léger accroissement des pertes à l'image de la faible modification de résistivité conséquent à l'élévation de température, ceci permet de valider cette approche par la compatibilité des niveaux de pertes. Les pertes obtenues à partir de la mesure de U et de la température sont comprises dans l'intervalle :

$$0.15 \text{ Watts} < P_{calc} < 0.152 \text{ Watts} .$$

Cette valeur est tributaire de l'estimation analytique de la résistance.

La troisième estimation des pertes par la mesure de U et de I, précitée, donne :

$$P_{U \times I} = 0.143 \text{ Watts} .$$

Cette mesure peut être utilisée comme repère pour évaluer la précision de la méthode, soit une erreur inférieure à 10%, ce qui est excellent compte tenu des hypothèses simplificatrices, de l'estimation du volume et de l'utilisation des thermocouples !!!

La précision de ces méthodes est en effet encourageante, pas assez bonne pour permettre de fines analyses quantitatives, bien que les travaux de [27] montrent la finesse de cette approche sur des géométrie planes, mais suffisante pour des approches qualitatives.

3. Calcul des pertes : utilisation du modèle thermique stationnaire

a) Expression de l'équation de la chaleur : modélisation fine du coefficient d'échange

Lorsque l'écart entre la température ambiante et celle du composant n'est plus petit devant la température ambiante, l'hypothèse de linéarité de l'échange n'est plus satisfaite. Nous pouvons utiliser les expressions obtenues dans la partie B du chapitre II des coefficients d'échange par convection et rayonnement. Ainsi, après substitution des expressions des coefficients d'échange avec l'intérieur et l'extérieur de l'équation (106) nous obtenons :

$$\rho C_p \frac{\partial \bar{T}(t)}{\partial t} + \frac{1}{d_c} \left[\frac{\pi}{2} h_{conv} (T - T_{amb}) + \sigma \epsilon \left(1 + \frac{1 - F}{1 + F(\epsilon - 1)} \right) (T^4 - T_{amb}^4) \right] = \frac{P(t)}{Vol} \quad (108)$$

CHAPITRE III

Nous utilisons une forme simplifiée du coefficient de convection par rapport à celle utilisée au chapitre II. Le coefficient de convection s'exprime :

$$h_{conv} = 1.42 \frac{(T - T_{amb})^{0.25}}{(Nd_c)^{0.25}}$$

Le coefficient F, est le facteur de vue qui s'exprime :

$$F = \sqrt{\left(\frac{Nd_c}{D}\right)^2 + 1} - \frac{Nd_c}{D}$$

L'équation différentielle associée n'est plus linéaire, et nous ne pouvons faire apparaître une constante de temps caractérisant les échanges de chaleur avec l'extérieur. L'utilisation de la modélisation thermique stationnaire revient de fait à fixer les conditions aux limites du problème en régime transitoire. Nous allons montrer que la modélisation thermique stationnaire associée à un relevé de température permet de remonter aux pertes instantanées dans le volume du conducteur.

Le modèle thermique instationnaire proposé équation (108) est entièrement analytique et bénéficie de la gamme de validité du modèle thermique stationnaire. Il n'y a alors plus de constante de temps à identifier.

b) Confrontation du modèle avec coefficient d'échange linéarisé au modèle thermique stationnaire

Nous avons deux outils, le premier utilise une constante de temps qui est identifiée lors du retour à la température ambiante du système étudié. La méthode nécessite une description analytique qui exploite des constantes obtenues par la mesure. Le second outil utilise une description complètement analytique de l'équation de la chaleur. Le premier outil (équation (106)) a montré son efficacité malgré les hypothèses de l'étude, nous allons donc étudier l'efficacité de la seconde méthode. Pour cela, nous reprenons l'évolution des sources de chaleur de l'inductance à air précédemment étudiée, et nous superposons le résultat obtenu

CHAPITRE III

pour un échange linéarisé sur la courbe bleue de la **Figure 55**, et pour un échange modélisé sur la courbe rouge en pointillés de la **Figure 55**.

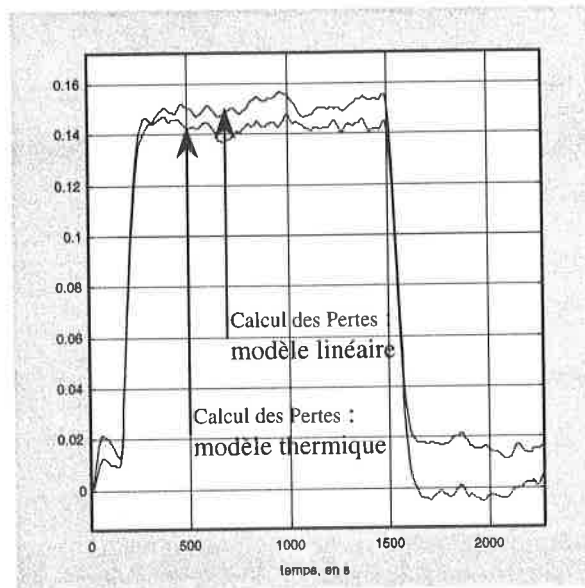


Figure 55 : *Superposition des pertes calculées par identification de la constante de temps thermique et par exploitation du modèle thermique stationnaire.*

Pour cette approche nous appliquons l'équation (108) et utilisons les relevés de température précédemment exploités. Une différence est constatée sur le maximum atteint, ce qui est directement lié à l'imprécision de la modélisation stationnaire de l'échange. Ceci pourrait fournir, en supposant un relevé instantané des pertes, un moyen d'ajustement de la modélisation thermique stationnaire, et de discrimination de la part d'échange incombant à la convection ou au rayonnement. Cette approche semble permettre d'annuler le décalage lors du retour à la température ambiante. Par cette méthode la précision semble encore meilleure puisque le niveau de pertes calculées (P_{calc}) est alors encadré :

$$0.14 < P_{calc} < 0.145 .$$

c) *Résultats pour un courant d'intensité 15A*

En appliquant la même méthode, nous calculons les pertes dans la bobine traversée par un courant continu. Pour cela nous exploitons un relevé de température, et ainsi que précédemment nous identifions la constante de temps du retour à la température ambiante, lorsqu'on éteint les sources. Le relevé de température pour un courant continu de 15 A est

CHAPITRE III

représenté **Figure 56**. L'essai a été effectué avec un courant de 15A et sous une tension initiale de 0.0856V et finale de 0.0915V, ceci correspond donc à un encadrement des pertes :

$$1.27 W < P < 1.37 W .$$

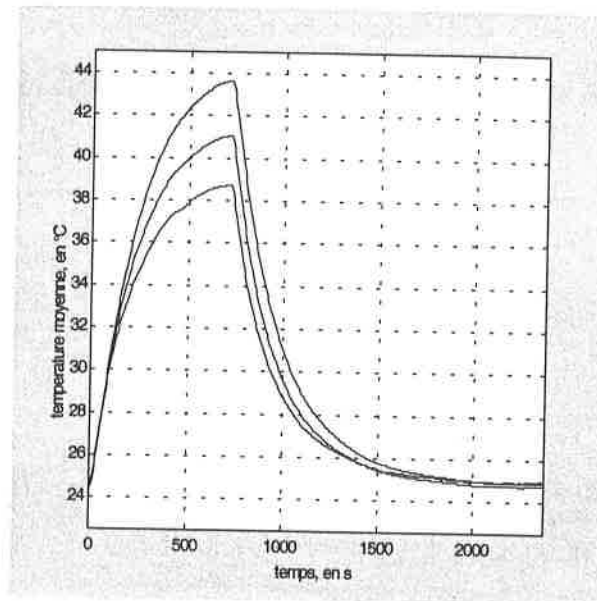


Figure 56 : Mesures des températures à différentes hauteurs, bobinage traversé par 15A.

La variation de température devient importante, il faut donc mesurer de nouveau la constante de temps, puisque l'influence du rayonnement peut devenir sensible. On identifie une constante de temps :

$$\tau_{th} = 210s ,$$

ce qui est inférieur à la précédente mais correspond bien à un accroissement du coefficient d'échange. La variation de la constante de temps en fonction du niveau de pertes montre que l'hypothèse de linéarité n'est pas vérifiée.

Le traitement de ces températures pour calculer les pertes est présenté **Figure 57**. La courbe en trait continu correspond aux pertes calculées avec un échange modélisé par une constante de temps, il apparaît un écart avec les pertes mesurées par les grandeurs électriques.

La modélisation des échanges thermiques par une constante de temps, courbe en traits continu commence à montrer ces limites.

CHAPITRE III

La courbe en traits interrompus correspond aux pertes calculées en utilisant le modèle thermique stationnaire de l'échange (équation (108)). On peut noter, sur cette même courbe, que les pertes évoluent de 1.2 W à 1.3 W, ce qui est très proche de l'encadrement des pertes obtenues par la mesure de U et de I. En outre, il apparaît un léger accroissement des pertes dans le temps à l'image de l'accroissement de la température et donc de la résistivité.

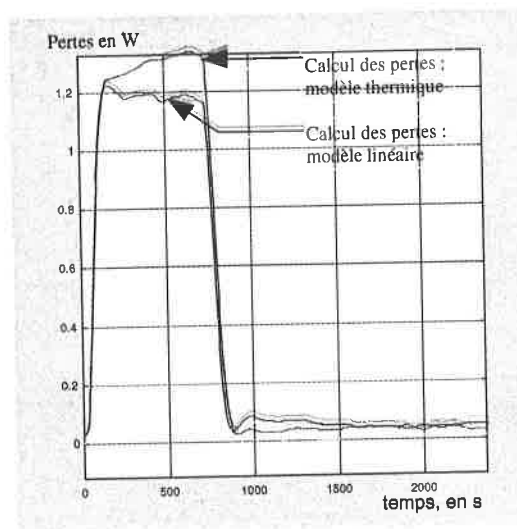


Figure 57 : Superposition des pertes calculées par identification de la constante de temps thermique et par exploitation du modèle thermique stationnaire , bobinage traversé par 15A.

d) Résultats pour un courant d'intensité 30A

De la même manière que précédemment pour un courant continu de 30A, le relevé de température est présenté on mesure au début de l'essai une tension $U=0.174V$, et à la fin de l'essai de $0.214V$, ceci correspond donc à un encadrement des pertes :

$$5.2 W < P < 6.4 W .$$

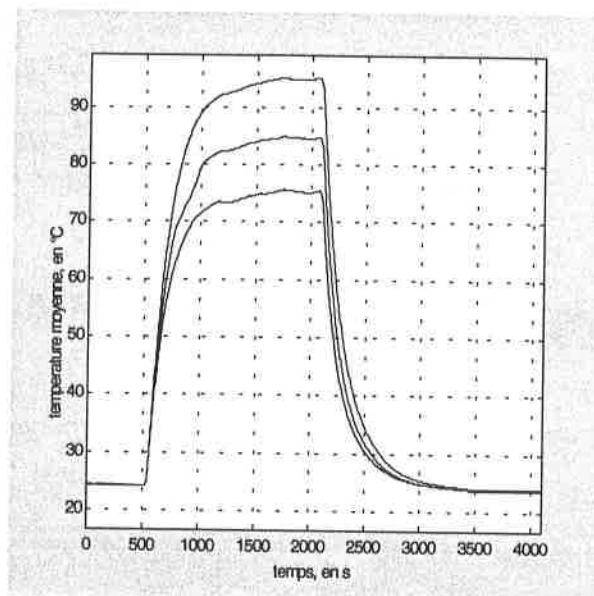


Figure 58 : Mesures des températures à différentes hauteurs, bobinage traversé par 30A.

Par suite à la remarque à la mesure précédente (pour $I=15A$), l'élévation de température étant encore plus importante la linéarisation de l'échange par le biais de la constante de temps sera davantage inexacte. Les relevés de température permettent d'identifier une constante de temps $\tau_{th} = 175s$, qui est encore réduite par rapport à l'essai précédent, puisque la valeur du coefficient d'échange a augmenté. On constate que le calcul des pertes avec un échange linéarisé, courbe en traits continu de la **Figure 59** offre encore un bon ordre de grandeur des pertes, soit environ 4.8 Watts. Quant au modèle thermique stationnaire, d'après la courbe en traits interrompus de la **Figure 59**, il permet encore une très bonne concordance entre l'intervalle de puissance ainsi calculé :

$$5.5 W < P_{calc} < 6.3 W ,$$

et l'intervalle de puissance mesuré par l'intermédiaire des grandeurs électriques

$$5.2 W < P_{mes} < 6.4 W .$$

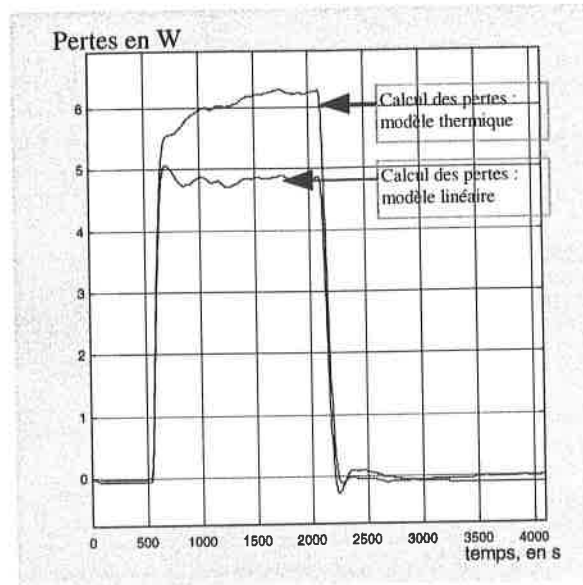


Figure 59 : *Superposition des pertes calculées par identification de la constante de temps thermique et par exploitation du modèle thermique stationnaire, bobinage traversé par 30A.*

4. Conclusion sur la faisabilité

Nous avons vu qu'avec des approximations, nous pouvions, en utilisant des relevés de température, remonter aux sources de chaleur dans l'ensemble du volume du composant. Le modèle thermique en régime stationnaire, inséré dans l'équation de la chaleur, permet de remonter aux sources de chaleur avec une très bonne précision et bénéficie de la plage de validité des modèles physiques. Ces calculs ont pu être vérifiés à partir de mesures électriques. Cette approche a été sous exploitée, puisqu'elle possède la capacité d'étudier localement les sources de chaleur (à partir de mesures locales de température et de l'utilisation du Laplacien). En y réfléchissant, on ne peut manquer de s'enthousiasmer pour cette approche, puisque notre souci d'électrotechnicien est d'accroître le rendement sans élévation de température. Or, les rendements sont détériorés par l'existence des pertes qui se traduisent par une élévation de température. Il apparaît que "la chaleur est le messenger direct des pertes", il semble donc normal de mesurer ces pertes à partir de la température. Ces résultats nous ont encouragés à nous frotter à un système bien plus complexe : l'inductance à noyau torique.

C. Transposition de la méthode pour la mesure des pertes dans une inductance à noyau torique

1. Démarche pour la transposition de l'étude à l'inductance à noyau torique

L'application de méthodes de calcul de sources de chaleur à partir de relevés de la température appliquée à l'inductance à air a montré son efficacité. La transposition à l'inductance à noyau torique relève de plusieurs degrés de complexité supplémentaires. Tout d'abord l'inductance à noyau torique, dont la géométrie est rappelée à la **Figure 60**, est constituée de deux éléments :

- le noyau torique en poudre de fer,
- le bobinage autour de ce noyau avec des conducteurs en cuivre.

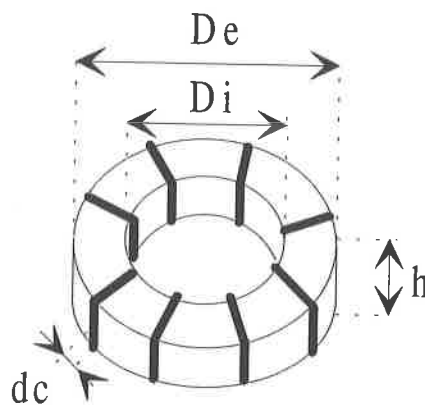


Figure 60 : Représentation schématique de l'inductance à noyau torique.

Il faut faire intervenir dans les équations l'échange thermique entre ces deux corps.

Ensuite, l'aspect corrélation avec les mesures électriques devient plus délicat, si nous envisageons l'étude en alternatif, puisqu'il est difficile d'effectuer une séparation expérimentale des pertes. Toutefois, la valeur moyenne du produit instantané courant tension (puissance active) nous fournira une estimation des pertes globales des conducteurs de cuivre et du noyau de fer. Par ailleurs, les données du catalogue constructeur permettent d'estimer les pertes dans le noyau de fer, puis les pertes dans les conducteurs en alternatif pourront être évaluées en exploitant les résultats de l'étude électromagnétique (équation (28) du chapitre I). Dans un premier temps les mesures sont effectuées en courant continu, de façon à déterminer les constantes de temps des fuites thermiques du bobinage vers l'air ambiant et du bobinage

CHAPITRE III

vers le noyau, puis du noyau vers l'air ambiant. Dans ce cas, les sources de chaleur pourront être mesurées électriquement sans difficulté. Par rapport à l'inductance à air, cette étape présente la difficulté d'évaluer le couplage thermique.

Dans un second temps, des mesures de température seront effectuées pour une alimentation en alternatif et les sources de chaleur estimées seront corrélées aux sources de chaleur calculées à partir des relevés de la température.

2. Outil de passage des températures aux sources de chaleur

L'inductance à noyau torique équipée de thermocouples permettant de mesurer la température sur chacune des faces des conducteurs et du noyau est représentée sur la **Figure 61**.

Chacun des éléments (bobinage, noyau) peut être décrit par un système d'équations différentielles inspiré du système de l'équation (101) pour représenter le régime thermique instationnaire. Toutefois, en conservant des hypothèses similaires à celles formulées pour l'inductance à air, le régime thermique instationnaire sera décrit par une seule équation différentielle qui intégrera les conditions d'échange de chaleur sur les parois (cf. équation (103)).



Figure 61 : Photographie de l'inductance équipée de thermocouples.

Les hypothèses sont :

- le champ de température dans le bobinage est homogène, et noté T_c ,

CHAPITRE III

- le champ de température dans le noyau en poudre de fer est homogène, et noté T_f .
- le bobinage est inférieur ou égal à une couche complète.

La géométrie du composant sera simplifiée pour cette étude indicative :

- le noyau est assimilé à un cylindre de rayon tel que le périmètre du tore et du cylindre équivalent soit identique $R = \frac{De - Di + 2h}{2\pi}$ et de longueur égale à la longueur moyenne du noyau torique : $\pi \frac{De - Di}{2}$,
- le bobinage est assimilé à un cylindre creux d'épaisseur d_c , autour du cylindre de rayon intérieur $R_c = \frac{De - Di + 2h}{2\pi} + e$, et de longueur Nd_c . Le bobinage et le noyau sont représentés par un cylindre respectivement creux et plein sur la **Figure 62**.

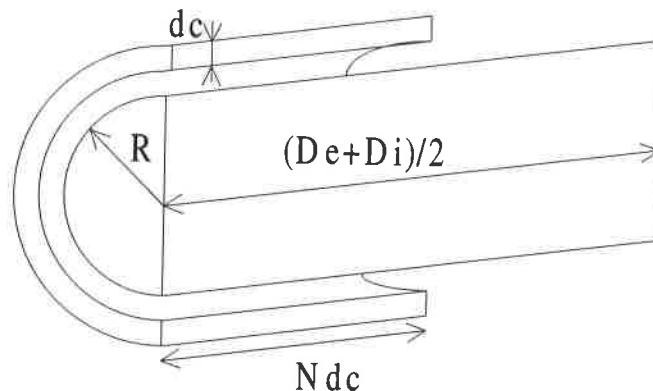


Figure 62 : Géométrie équivalente à l'inductance à noyau torique.

L'échange de chaleur entre les deux corps est exprimé dans les conditions aux parois qui sont à rapprocher du modèle thermique en régime stationnaire établi au chapitre II. En effet l'expression complète relie d'une part la température du noyau en fer T_f à la température des conducteurs T_c sur une surface $S_1 = Nd_c \times 2\pi R$, avec $R = \frac{De - Di + 2h}{2\pi}$, et d'autre part la température du noyau de fer T_f à la température ambiante T_{amb} sur la surface complémentaire $S_2 = \pi^2 R(De + Di) - S_1$ avec $R = \frac{De - Di + 2h}{2\pi}$. Chacun des deux éléments est représenté par un système d'équations différentielles comportant une équation de la

CHAPITRE III

chaleur, des conditions d'échange sur les parois et des conditions initiales. Il est plus aisé de les exprimer en coordonnées cylindriques simplifiées grâce aux hypothèses énoncées. Les systèmes d'équations sont mentionnés **équation (109)** et **équation (110)**, respectivement pour le bobinage et le noyau.

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_c C_c \frac{\partial T_c}{\partial t} - \lambda_c \frac{\partial^2 T_c(r,t)}{\partial r^2} = p_c(r,t) \\ -\lambda_c \frac{\partial T_c}{\partial r} \Big|_{r=R} = h_{c \rightarrow f} (T_c - T_f) \\ -\lambda_c \frac{\partial T_c}{\partial r} \Big|_{r=R+d_c} = h_{c \rightarrow amb} (T_c - T_{amb}) \\ T(r = R, t = 0) = T_{amb} \end{array} \right. \quad (109)$$

Nous allons substituer les conditions d'échange dans l'équation de la chaleur.

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_f C_f \frac{\partial T_f}{\partial t} - \lambda_f \frac{\partial^2 T_f(r,t)}{\partial r^2} = p_f(r,t) \\ -\lambda_f \frac{\partial T_f}{\partial r} \Big|_{r=R} = h_{f \rightarrow c} (T_f - T_c) + h_{c \rightarrow amb} (T_f - T_{amb}) \\ T_f(r = R, t = 0) = T_{amb} \end{array} \right. \quad (110)$$

Nous n'aurons ainsi plus qu'un système de deux équations différentielles, et de constantes de temps pour étudier le système. Nous appliquons donc l'opérateur valeur moyenne exprimé par l'équation (104) à la température du bobinage sur l'intervalle $[R; R + d_c]$. Nous appliquons à la température du noyau sur la section de valeur élémentaire $ds = 2\pi r dr$ dans un intervalle $[0; R]$, l'opérateur :

$$\bar{F} = \frac{I}{\pi R^2} \int_0^R F(r,t) 2\pi r dr .$$

Les équations de la chaleur respectivement dans les jeu d'équations (109) et (110), deviennent :

$$\rho_c C_c \frac{\partial \bar{T}_c}{\partial t} - \frac{\lambda_c}{d_c} \left[\frac{\partial T_c(r,t)}{\partial r} \right]_{r=R}^{r=R+dc} = \overline{p_c(t)}$$

$$\rho_f C_f \frac{\partial \bar{T}_f}{\partial t} - \frac{\lambda_f}{\pi R^2} \left[\frac{\partial T_f(r,t)}{\partial r} 2\pi r \right]_{r=0}^R + \frac{\lambda_f}{\pi R^2} [T_f(r,t) 2\pi]_{r=0}^R = \overline{p_f(t)}$$

Le second terme entre crochets de l'équation de la chaleur qui porte sur le noyau correspond à la conduction thermique dans le noyau. Cette résistance thermique sera, comme dans l'étude stationnaire négligée. Ainsi, en considérant les valeurs prises sur les parois et en substituant par les coefficients d'échange établis lors de l'étude stationnaire, les équations de la chaleur pour le bobinage et le noyau deviennent :

$$\rho_c C_c \frac{\partial \bar{T}_c}{\partial t} + \frac{h_{c \rightarrow f}(T_c - T_f)}{d_c} + \frac{h_{c \rightarrow amb}(T_c - T_{amb})}{d_c} = \frac{P_c(t)}{Vol_c}$$

$$\rho_f C_f \frac{\partial \bar{T}_f}{\partial t} + \frac{2h_{f \rightarrow c}(T_f - T_c)}{R} + \frac{2h_{f \rightarrow amb}(T_f - T_{amb})}{R} = \frac{P_f(t)}{Vol_f}$$

En formulant l'hypothèse de linéarité des échanges de chaleur, les équations ci-dessus, s'expriment en fonction de constantes de temps thermiques :

$$\rho_c C_c Vol_c \left(\frac{\partial \bar{T}_c}{\partial t} + \frac{(T_c - T_{amb})}{\tau_{ca}} + \frac{(T_c - T_f)}{\tau_{cf}} \right) = P_c(t) \quad (111)$$

$$\rho_f C_f Vol_f \left(\frac{\partial \bar{T}_f}{\partial t} + \frac{(T_f - T_c)}{\tau_{fc}} + \frac{(T_f - T_{amb})}{\tau_{fa}} \right) = P_f(t)$$

Les valeurs de la densité et de la capacité calorifique pour le cuivre sont disponibles dans [30], pour le noyau la densité est donnée par le constructeur dans [31], et la capacité calorifique du noyau a été mesurée ($C_f=400 J/(kg^\circ K)$).

Les équations (111) constituent l'outil de passage des températures aux sources de chaleur. Ces expressions font intervenir 4 constantes de temps. Les expressions de ces constantes de temps sont les suivantes :

$$\begin{aligned} \tau_{ca} &= \frac{\rho_c C_c d_c}{h_{c \rightarrow amb}} & \tau_{cf} &= \frac{\rho_c C_c d_c}{h_{c \rightarrow f}} \\ \tau_{fa} &= \frac{\rho_f C_f R}{h_{f \rightarrow amb}} & \tau_{fc} &= \frac{\rho_f C_f R}{h_{f \rightarrow c}} \end{aligned} \quad (112)$$

L'outil de passage des températures aux sources de chaleur est défini par le système d'équations (111) et par les constantes de temps à identifier. Toutefois, l'identification de ces constantes de temps n'est pas immédiate et nous allons donc développer notre approche sur ce point.

Par ailleurs, de la même manière que pour le bobinage nous étudierons la modélisation thermique instationnaire basée sur la modélisation thermique stationnaire.

3. Exploitation des mesures en continu pour l'identification des constantes de temps thermiques

a) estimation intuitive et expérimentale des constantes de temps

(1) Constante de temps du conducteur vers l'extérieur (τ_{ca})

Dans un premier temps, nous allons estimer les valeurs des constantes de temps de fuites thermiques du bobinage et du noyau vers l'ambient τ_{ca}, τ_{fa} . Pour cela nous nous inspirerons de mesures effectuées sur chacun de ces corps isolés. Les valeurs énoncées sont des estimations pouvant servir de point de départ au calcul numérique de ces constantes de temps et elles seront donc utilisées pour un encadrement du domaine de recherche.

Sur la **Figure 63** est représentée l'évolution temporelle de la température d'un conducteur seul en position horizontale de **diamètre 4mm**. On observe une élévation de température assez rapide lors du passage d'un courant électrique dans le conducteur (50 Ampères), puis un retour à la température ambiante d'allure exponentielle lors de l'extinction de l'alimentation. Toujours avec l'hypothèse d'une équation différentielle du premier ordre (soit des échanges linéarisés), on identifie, lors du retour à la température ambiante, une constante de temps : $\tau \approx 100 \text{ s}$.

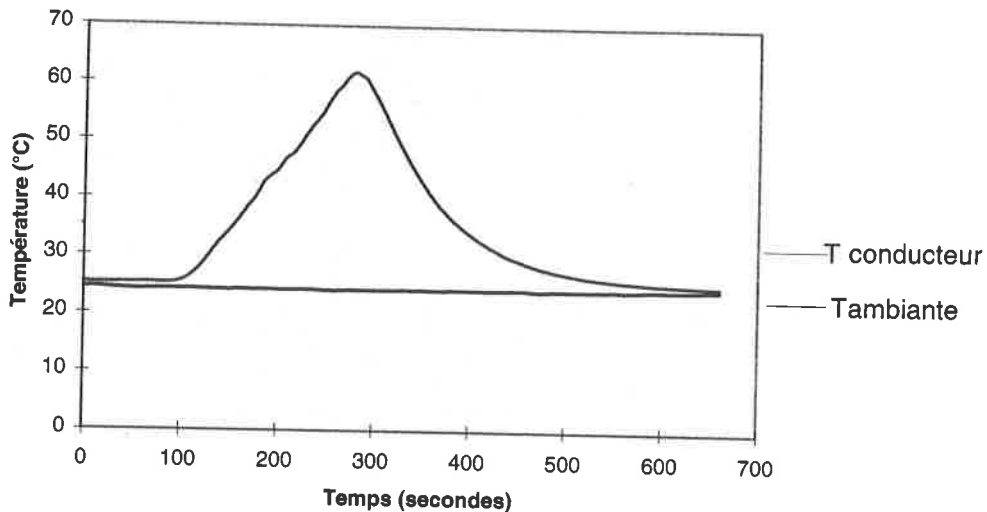


Figure 63 : Evolution de la température d'un conducteur en position horizontale.

La valeur de τ_{ca} , comme le montre son expression, est inversement proportionnelle au coefficient d'échange $h_{c \rightarrow a}$. Or, dans notre cas nous supposons qu'environ la moitié du bobinage échange avec l'ambiant, et l'autre moitié échange avec le noyau. Le coefficient d'échange $h_{c \rightarrow a}$ est donc la moitié du coefficient d'échange obtenu pour le bobinage seul. La constante de temps peut alors être estimée au double de celle obtenue avec le conducteur seul : $\tau_{ca} \leq 2\tau = 200 \text{ s}$.

Quand on soumet le composant bobiné à un gradient de pertes dans le conducteur, la pente à l'origine de la température du conducteur ($T_c(t)$ représentée **Figure 64**) fournit une estimation de la constante de temps τ_{ca} . Par une méthode graphique, on identifie cette pente à l'origine de $T_c(t)$, soit :

$$\tau_{ca} \approx 200 \text{ s}.$$

L'évolution de cette température ($T_c(t)$) est ensuite freinée par l'échange avec le noyau, et on observe sur la **Figure 64** une cassure de cette évolution.

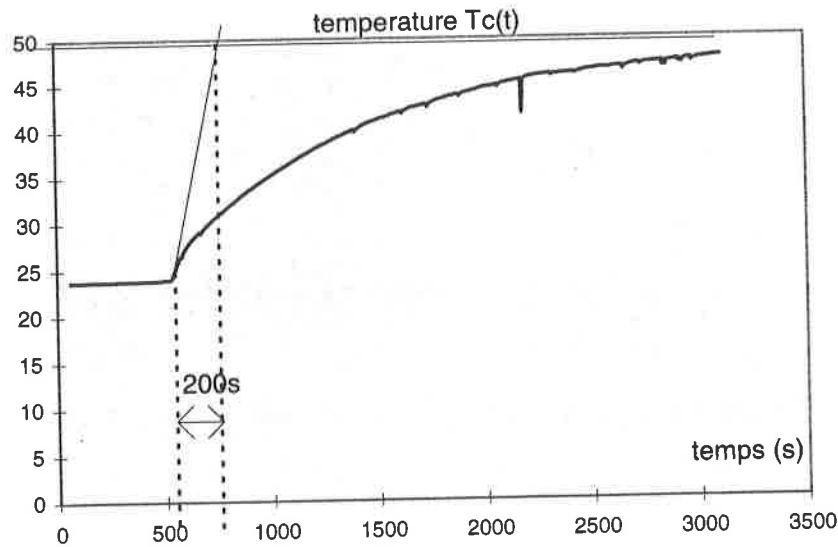


Figure 64 : Evolution de la température du conducteur en présence du noyau.

(2) Constante de temps du noyau de fer vers l'extérieur (τ_{fa})

La constante de temps des fuites thermiques du noyau vers l'ambiant peut être également évaluée. La constante de temps des fuites thermiques a été obtenue pour le noyau seul en chauffant celui ci dans un four, puis en relevant l'évolution de la décroissance de la température de celui ci, à sa sortie du four :

$$\tau_{noyau} \approx 1000s .$$

La constante de temps du noyau bobiné est liée à cette constante de temps, mais l'échange de chaleur est proportionnelle à la surface d'échange effective. En l'occurrence la bobine étudiée, alimentée par un courant continu $I=25A$, comporte 28 spires de diamètre 2mm, le rapport entre la surface d'échange du noyau seul et du noyau bobiné est 2. La constante de temps peut ainsi être estimée à :

$$1000s \leq \tau_{fa} \leq 2000 s .$$

Les courbes de la **Figure 65** montrent l'évolution temporelle de la température du cuivre et de la température du noyau. Ces allures correspondent à l'évolution de la température du bobinage et du noyau, lorsque le bobinage est traversé par un courant continu constant. Seul les conducteurs sont siège d'une source de chaleur, mais les températures sont très proches du fait du couplage thermique.

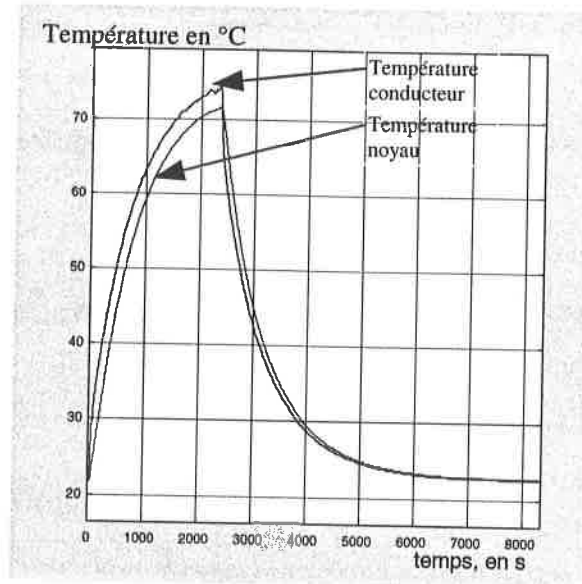


Figure 65 :Évolution de la température du noyau et du conducteur en continu, $I=25A$.

(3) Constante de temps du noyau vers les conducteurs et vice versa (τ_{fc} et τ_{cf})

Il nous reste à évaluer les constantes de temps de couplage du bobinage vers le noyau et vice versa. Pour cela nous pouvons utiliser l'évolution de la différence de température entre le noyau et le conducteur en fonction du temps. La constante de temps de l'échange entre le bobinage et le noyau peut être estimée à partir de l'observation de la **Figure 66** qui représente cette évolution, soit $T_c(t) - T_f(t)$. Cette courbe correspond à un zoom sur la différence entre les deux courbes de la **Figure 64**.

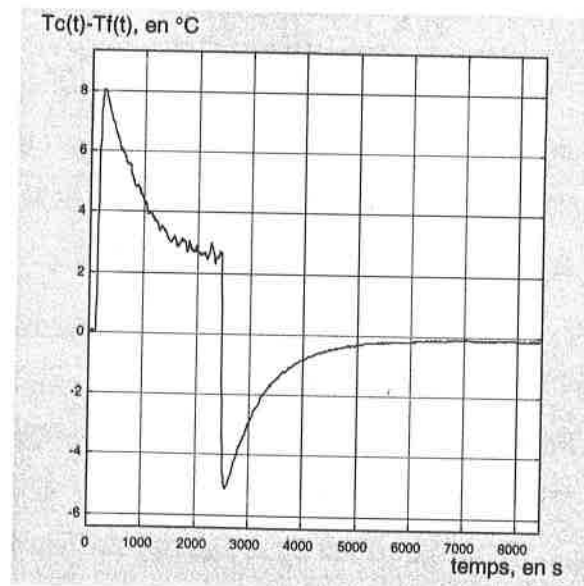


Figure 66 :Évolution de la différence de température entre bobinage et noyau.

CHAPITRE III

Un premier front montre que la différence de température évolue rapidement, puis au bout d'environ 30 secondes, cette différence atteint son maximum. Le tore commence à recevoir la chaleur puisque sa température commence à augmenter et la différence de température tend à se réduire.

De même, à l'extinction des sources, une inversion brusque de la température apparaît à 2500 secondes, et dure environ 80 secondes, après quoi le tore commence à restituer de la chaleur. La différence de température se réduit, pour s'annuler au bout de 3000 secondes. De ce relevé (cf. zoom **Figure 67**), on extrait l'estimation de la valeur de la constante de temps de l'échange des conducteurs vers le noyau en fer :

$$\tau_{cf} \approx 35 \text{ s.}$$

Par ailleurs, puisque les coefficients d'échange $h_{c \rightarrow f}$ et $h_{f \rightarrow c}$ sont identiques, les expressions

des constantes de temps proposées (équations (112)) suggère que : $\frac{\tau_{cf}}{\tau_{fc}} = \frac{\rho_c C_c d_c}{\rho_f C_c R} \approx 0.25$, la

constante de temps du noyau vers le cuivre peut donc être estimée à :

$$\tau_{fc} \approx 140 \text{ s.}$$

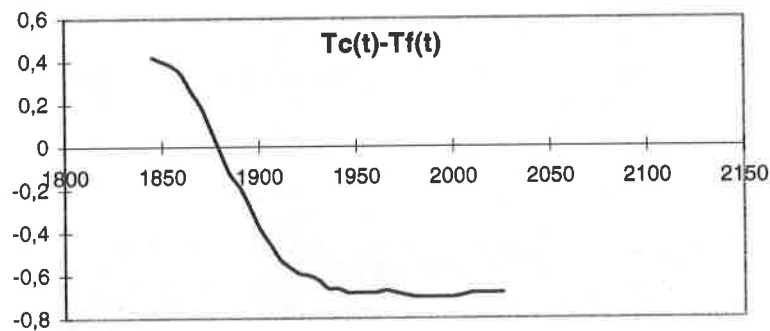


Figure 67 : Zoom sur la différence de température entre le noyau et le bobinage.

La constante de temps de l'annulation de la différence qui est le majorant des constantes de temps est de l'ordre de 1400 secondes, ce qui est proche de la constante de temps du noyau vers l'extérieur attendue. En bref, nous retenons les valeurs suivantes :

$$\begin{aligned} \tau_{ca} &= 200 \text{ s} & \tau_{fa} &= 1400 \text{ s} \\ \tau_{cf} &= 35 \text{ s} & \tau_{fc} &= 140 \text{ s} \end{aligned} \quad (113)$$

CHAPITRE III

b) *Calcul des sources de chaleur à partir des relevés de température.*

Les constantes de temps sont connues pour un point de fonctionnement, et les équations de la chaleur simplifiées qui permettront de calculer les sources de chaleur dans le bobinage et le noyau sont explicitées (111). Sur la **Figure 68**, les pertes dans le bobinage, et les pertes dans le noyau sont superposées.

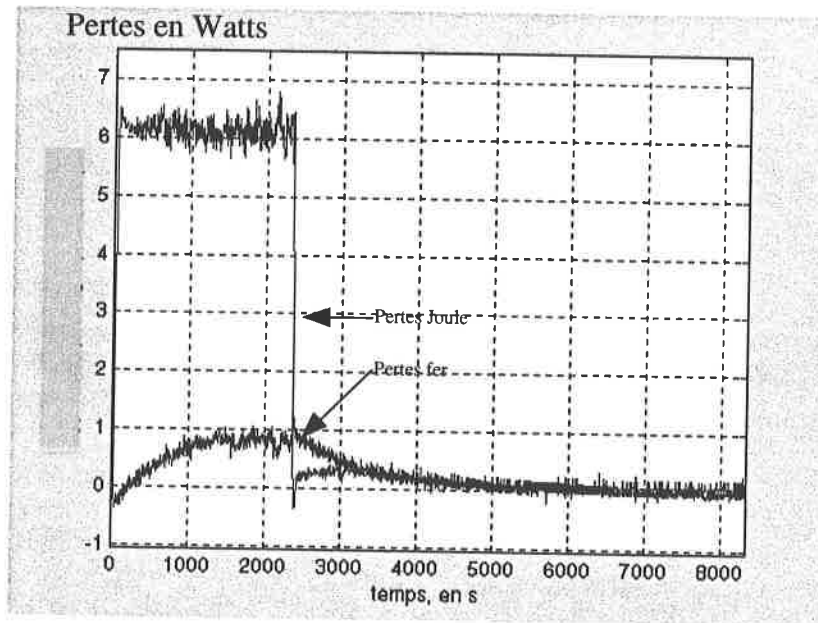


Figure 68 : Sources de chaleur(en W) calculées respectivement dans les conducteurs et le noyau.

Le traitement des relevés de température fournit une valeur des pertes en continu dans le bobinage, dans l'intervalle [0s à 2400s], de 6.2 Watts, tandis que les mesures électriques montrent un courant de 20 Ampères, sous une tension de 0.26 Volts initialement, et 0.3 Volts au terme des 2400 secondes, soit des pertes évoluant de 5.2 Watts à 6 Watts. Le résultat du calcul est supérieur aux pertes réelles et ne reproduit pas l'évolution des pertes dans le temps dues à l'augmentation de la résistivité. Par ailleurs, le traitement ne montre pas des pertes rigoureusement nulles dans le noyau, comme nous l'aurions espéré, mais des portions d'exponentielles qui sont à l'image de l'évolution temporelle de $T_f(t)-T_c(t)$ superposée à $T_f(t)-T_{amb}$. Cela signifie que les constantes de temps représentent de manière imparfaite les échanges thermiques, notamment car la gamme de température est élevée et la modélisation du couplage thermique, par le biais de constantes de temps, imparfaite puisqu'elle suppose des échanges dépendant linéairement de la température.

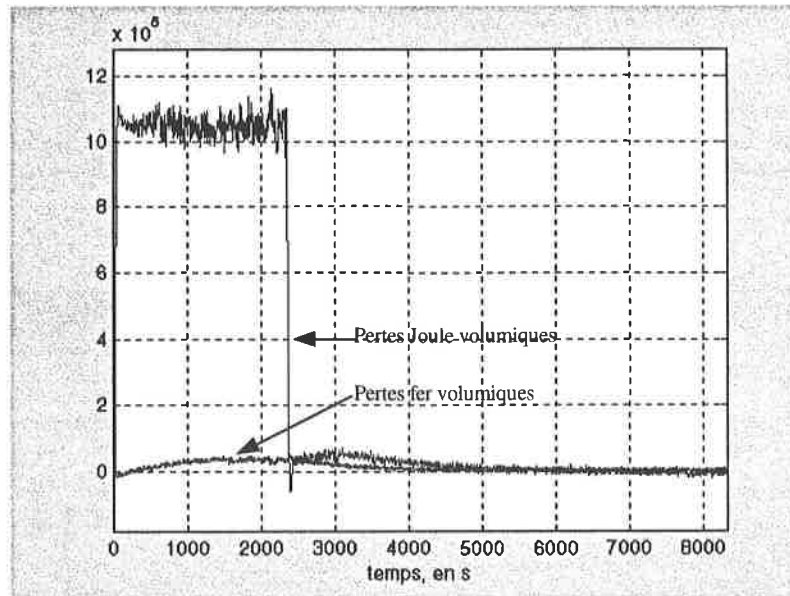


Figure 69 : Sources de chaleur ramenées au volume dans le bobinage et le noyau.

Toutefois, la **Figure 69** qui représente les pertes dans le bobinage et dans le noyau ramenées à leurs volumes respectifs permet de relativiser ces disparités. Les pertes dans le noyau apparaissent alors comme quasiment nulles sur toute la plage.

Les constantes de temps étalonnées en continu restent valables en alternatif. La modélisation thermique instationnaire peut donc permettre une mesure des pertes séparément dans le noyau et le bobinage à partir de mesures de température. La modélisation thermique stationnaire de l'inductance à noyau torique permettrait d'avoir un modèle complètement analytique. Ce qui présente le double avantage de s'affranchir d'une identification fastidieuse et imprécise des différentes constantes de temps et d'avoir un modèle dont la plage de validité est plus importante. Nous allons maintenant présenter les résultats obtenus avec le modèle thermique stationnaire.

4. Utilisation du modèle thermique stationnaire pour décrire le régime instationnaire

a) Expression de l'équation de la chaleur : modélisation fine des échanges thermiques

Nous avons lors de l'étude thermique instationnaire de l'inductance à air (paragraphe 3 de la partie C de ce chapitre) montré qu'il était possible d'exploiter le modèle thermique

CHAPITRE III

stationnaire global de l'inductance à air (explicité au chapitre II) en l'insérant dans l'équation de la chaleur afin de décrire le régime instationnaire. Cette approche est d'autant mieux justifiée que les élévations de température sont élevées, et l'hypothèse de linéarité erronée. Ainsi, l'équation de la chaleur peut être réécrite en y insérant la modélisation des échanges par convection et rayonnement. Toutefois, le modèle thermique a montré des lacunes dans la représentation du couplage thermique entre le noyau et les bobinages. Or, la qualité de la modélisation de ce couplage va conditionner la qualité du modèle thermique stationnaire à séparer les pertes dans le noyau de celles dans les conducteurs. Le système d'équations de la chaleur exprimant l'évolution de la température du noyau et des conducteurs peut s'exprimer en considérant non plus des constantes de temps mais les flux de chaleur échangés :

$$\rho_c C_c Vol \frac{\partial \overline{T}_c}{\partial t} + \Phi_{ray}^c + \Phi_{conv}^c + \Phi_{cond}^c = P_c(t) \quad (114)$$
$$\rho_f C_f Vol_f \frac{\partial \overline{T}_f}{\partial t} + \Phi_{ray}^f + \Phi_{conv}^f + \Phi_{cond}^f = P_f(t)$$

Les flux de chaleur évacués par convection, rayonnement et conduction, sont explicités dans la partie C du chapitre II, ils présentent, comme c'était le cas pour l'inductance à air, une dépendance non linéaire avec la température. Ces équations différentielles sont aisément exploitables, malgré leur non linéarité, pour calculer les sources de chaleur, en revanche le problème inverse est complexe.

b) *Calcul des sources de chaleur à partir de la modélisation thermique stationnaire*

A partir des équations de la chaleur (114), des expressions des flux de chaleur évacués (modélisation de la convection, et du rayonnement présentée à la partie C du chapitre II) et des relevés de température, nous calculons les pertes dans la bobine. Considérons le cas qui a été traité par les équations de la chaleur avec constante de temps, c'est à dire un courant continu d'intensité 20A, pour une tension évoluant de 0.26V à 0.3V, ce qui correspond à l'encadrement suivant des pertes :

$$5.4 W < P < 6 W .$$

Tandis que la **Figure 68** montre les sources de chaleur calculées à partir de l'identification de constantes de temps, la **Figure 70** montre celles calculées en exploitant la modélisation

CHAPITRE III

thermique stationnaire, les courbes bleu et rouge représentent respectivement les pertes calculées dans les conducteurs et dans le noyau.

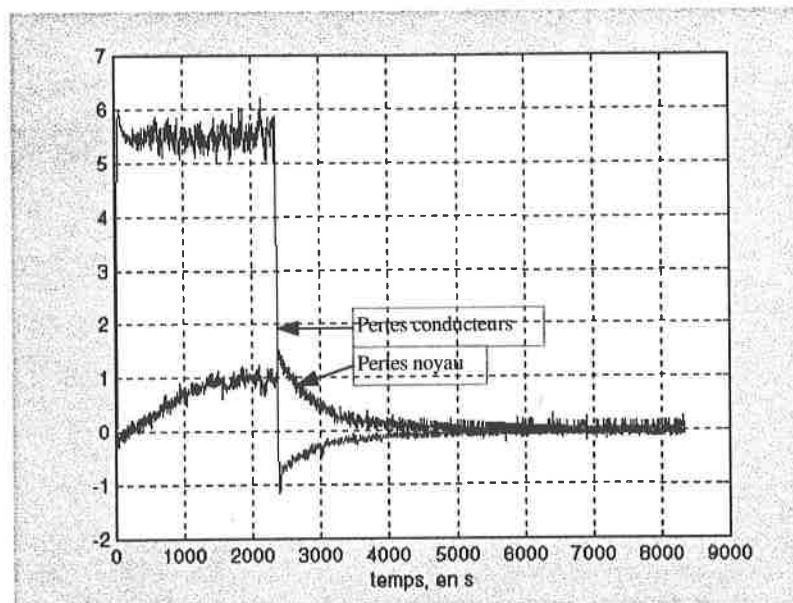


Figure 70 : Sources de chaleur calculées à partir de la modélisation thermique stationnaire respectivement dans les conducteurs et le noyau.

On constate que le terme de couplage ne suffit pas à justifier l'élévation de chaleur du noyau lorsque seul le bobinage produit de la chaleur, et ce aussi bien sur la **Figure 68** que sur la **Figure 70**. Par ailleurs, à l'apparition des sources de chaleur, la courbe représentant les pertes dans le noyau (rouge) part doucement de 0, alors que celle représentant les pertes joules (bleu) est quasi instantanément à sa valeur réelle (sur cette échelle de temps). Les transitoires des sources de chaleur calculées rendent compte des pertes dans le noyau et le bobinage.

Ces courbes peuvent être utilisées pour ajuster la modélisation. Le pic qui apparaît sur la courbe des sources de chaleur dans le noyau est à l'image de la différence de température entre le noyau et le bobinage, on peut agir sur les paramètres du modèle pour l'annuler. Il reste ensuite une évolution à l'image de l'évolution de la température du noyau, qui provient d'une surestimation des flux de chaleur échangés par le noyau, en réduisant ceux-ci dans la modélisation on peut également la réduire. Notre propos n'est pas d'ajuster notre modèle, nous ne faisons qu'en évoquer la possibilité.

5. Calcul des sources de chaleur en alternatif

Les caractéristiques géométriques de l'inductance à noyau torique sur laquelle les mesures sont effectuées sont définies dans la partie B du chapitre I.

L'inductance à noyau torique est le siège de deux sources de chaleur : pertes par effet Joule dans le bobinage et pertes fer dans le noyau dont les expressions sont détaillées respectivement équations (3) et (21) du chapitre I. Le banc de mesure est décrit à la figure 23 du chapitre II.

Les pertes Joule et les pertes dans le noyau sont calculées à l'aide des modèles. Les pertes totales sont mesurées électriquement, cette mesure est comparée à l'estimation des pertes totales issues de l'équivalence calorimétrique (partie C du chapitre II). Les sources de chaleur sont calculées à partir de l'équation de la chaleur basée sur la modélisation thermique stationnaire d'une part (cf. équations de référence (114)) et sur les constantes de temps d'autre part. Les résultats des calculs des sources de chaleur pourront être validés par comparaison avec les résultats issus de la modélisation électromagnétique ainsi que les mesures électriques.

a) Calcul des sources de chaleur à partir des mesures de température & corrélation aux mesures électriques (f=50Hz)

Le composant est soumis à un régime sinusoïdal de fréquence 50Hz pendant plusieurs minutes, de façon à ce que le régime stationnaire soit effleuré. Nous relevons le courant, la tension et les pertes totales mesurées à l'aide d'un wattmètre et d'un oscilloscope. Les valeurs du courant, de la tension et de la fréquence permettent de calculer les pertes Joule et les pertes dans le noyau. Les conditions de la mesure sont :

$$U=0.9V ; I=9.8A ; f=50Hz ; P=2.13W.$$

Pour calculer les pertes dans le noyau, on déduit de $U = 4.44B_m NSf$, le champ d'induction maximal $B_m = 0.0753 \text{ Teslas} = 753 \text{ Gauss}$. On vérifie, dans ces conditions que $RI \ll U$, puisque $R = 10m\Omega$, nous sommes donc encore dans un contexte de flux forcé. Ainsi les pertes sont : $P_f = 1.55W$. Toutefois, compte-tenu de cette chute de tension l'induction réelle est légèrement inférieure à 0.0753T.

Ensuite le calcul des pertes par effet Joule : $P_j = 0.98W$.

Les pertes totales calculées sont : $P = P_j + P_f = 2.53W$.

CHAPITRE III

L'utilisation de la corrélation issue de l'équivalence thermique (équation (63) du chapitre II) établie en continu, offre une estimation des pertes totales dans le composant, soit :

$$P=2.31\text{Watts.}$$

Les trois méthodes permettant d'obtenir les pertes totales donnent des résultats proches. Compte tenu de la gamme de validité des modèles, les valeurs de référence qui pourront servir à établir une comparaison, sont les pertes Joule calculées et les pertes totales mesurées à l'oscilloscope dont on déduit les pertes dans le noyau. En effet, pour les faibles fréquences, il n'est pas certain que la corrélation utilisée soit fiable, ainsi les valeurs de référence sont :

$$P_j=0.98\text{W} ; P=2.13\text{W} \text{ et } P_f=1.15\text{W}$$

- (1) Calcul des sources de chaleur à partir des mesures de température et des constantes de temps thermiques

Dans un premier temps, examinons le calcul des sources de chaleur à partir des équations (111), associées aux valeurs des constantes de temps prédéterminées en continu (cf. (113)). Il convient au préalable d'étalonner les thermocouples car il existe une différence de température entre les mesures des différents thermocouples lorsque le système est à la température ambiante. Cet étalonnage consiste à compenser les mesures des thermocouples, de manière à ce qu'au repos tous les thermocouples mesurent la même température. Les résultats sont alors nettement améliorés. Par ailleurs, nous effectuons un filtrage des signaux calculés, afin de réduire le bruit [27][31].

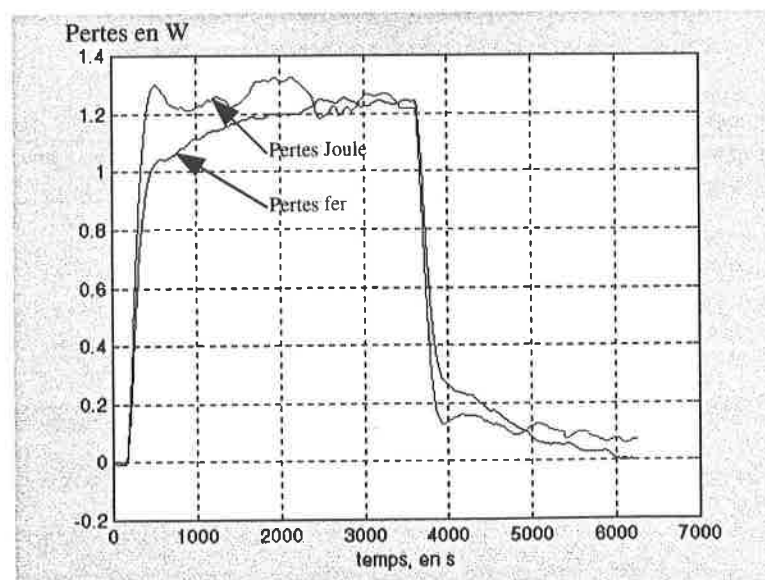


Figure 71 : Calcul des source de chaleur dans le bobinage et dans le noyau à partir des constantes de temps.

CHAPITRE III

La **Figure 71** représente les pertes calculées dans le noyau à partir des relevés de température. Le niveau de pertes moyen dans le noyau est d'environ :

$$P_f = 1.1 \text{ Watts.}$$

La différence avec les pertes dans le noyau de référence ($P_f = 1.15W$) est faible.

Le niveau de pertes calculées pour le bobinage à partir de ce même relevé atteint un niveau d'environ 1.2 Watts. Toutefois malgré l'étalonnage statique, il existe un offset d'environ - 0.15Watts, lors de l'extinction des sources. Les pertes joules calculées correspondent à la différence entre ces deux niveaux soit :

$$P_j = 1.05 \text{ Watts.}$$

Les niveaux des sources de chaleur dans le bobinage et dans le noyau apparaissent nettement. D'une part l'imperfection de la modélisation, ne permet pas d'annuler rigoureusement l'impact de l'échange de chaleur entre le noyau et le bobinage et d'autre part, il est difficile dans cette configuration de quantifier la valeur de la résistance en alternatif.

Le niveau de pertes totales est très proche de la valeur mesurée, soit environ 2.3Watts. Les résultats obtenus par la méthode de calcul des sources de chaleur sont très satisfaisants.

- (2) Calculs des pertes à partir de mesures de température et de l'utilisation du modèle thermique stationnaire

De la même manière que pour l'inductance à air nous allons utiliser le modèle thermique stationnaire établi au chapitre II pour l'inductance à noyau torique. Les équations dynamiques reliant l'évolution de température dans le noyau et le bobinage aux sources de chaleur (**114**) requièrent la connaissance des flux de chaleur échangés par convection, conduction et rayonnement. Ces expressions sont explicitées dans le chapitre II, aussi nous utiliserons le modèle thermique stationnaire complet. Les équations de bilan de ces flux sont résumées par les équations (**61**) du chapitre II qui font référence aux flux de chaleur calculées en amont. On calcule alors les pertes dans le noyau et les pertes dans le bobinage au regard des courbes respectivement rouge et bleu soit :

$$P_j = 0.92W$$

$$P_f = 1.2W.$$

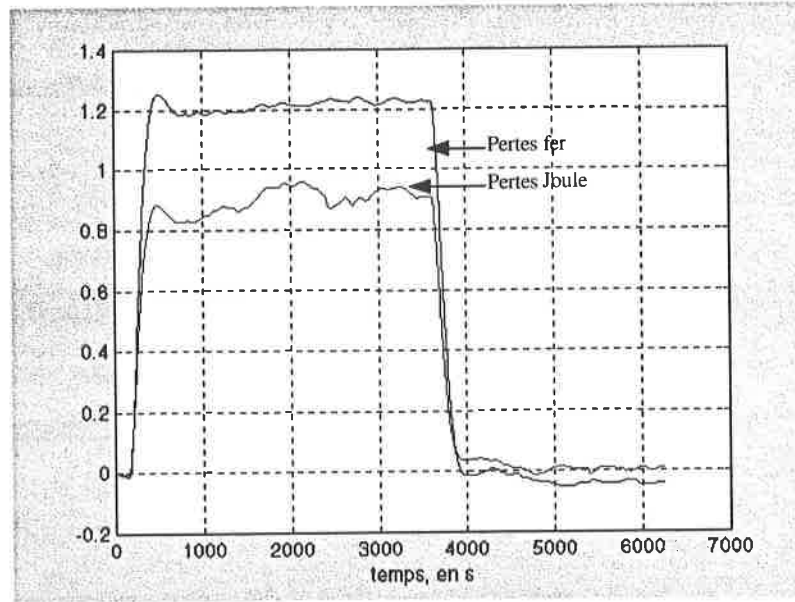


Figure 72 : *Calcul des sources de chaleur dans le bobinage et le noyau, à partir de la modélisation thermique stationnaire.*

Cette modélisation permet de restituer des courbes plus lisibles. Les sources de chaleur sont représentées par un créneau et le bruit sur les courbes est moindre. Un faible dépassement apparaît sur l'allure des pertes fer ceci est dû à la modification de l'adéquation de la modélisation thermique stationnaire selon la gamme de température envisagée. L'étalonnage statique permet d'annuler l'offset à l'extinction des sources.

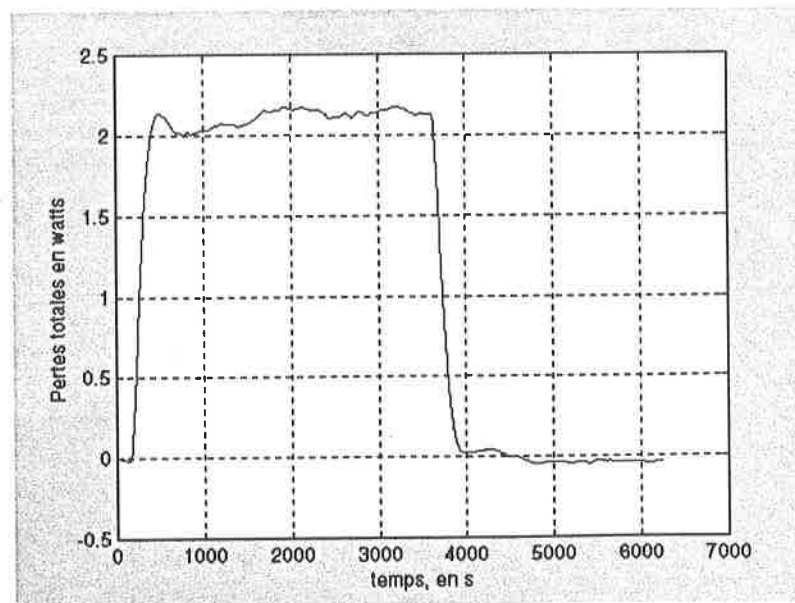


Figure 73 : *Calcul des sources de chaleur totales.*

CHAPITRE III

On remonte aux pertes totales (cf. **Figure 73**), qui sont à l'image de la somme des évolutions des sources de chaleur du bobinage et du noyau. Le niveau de pertes qui apparaît alors est d'environ :

$$P=2.1W$$

Cette valeur est légèrement inférieure aux résultats obtenus par les autres moyens d'estimation. Ce léger pessimisme est en accord avec les résultats de la modélisation thermique stationnaire, constaté au chapitre II. Les résultats obtenus lorsqu'on utilise le modèle thermique stationnaire dans les équations de la chaleur donnent des résultats en meilleur accord avec les valeurs de référence des pertes que la méthode basée sur des constantes de temps.

b) *Calcul des sources de chaleur à partir des mesures de température & corrélation aux mesures électriques (f=500Hz)*

Les conditions de la mesure sont :

$$U=2V ; I=2.3A ; f=500Hz ; P=0.9W.$$

Pour le calcul des pertes on déduit des modèles : $P_j=0.06W$; $P_f=0.75W$ par conséquent les pertes totales calculées sont :

$$P=P_j+P_f=0.81Watts.$$

L'utilisation de la corrélation issue de l'équivalence thermique (équation (63) du chapitre II) établie en continu, offre une estimation des pertes totales dans le composant, soit :

$$P=0.87Watts.$$

(1) *Calcul des sources de chaleur à partir des mesures de température et des constantes de temps thermiques*

Dans un premier temps, examinons le calcul des sources de chaleur à partir des équations (111), associées aux valeurs des constantes de temps prédéterminées (cf. (113)).

La **Figure 74** représente les pertes calculées dans le noyau à partir des relevés de température.

Le niveau de pertes dans le noyau est d'environ :

$$P_f=0.85 Watts.$$

La différence avec les pertes estimées à partir des données constructeur ($P_f = 0.81 Watts$) est faible.

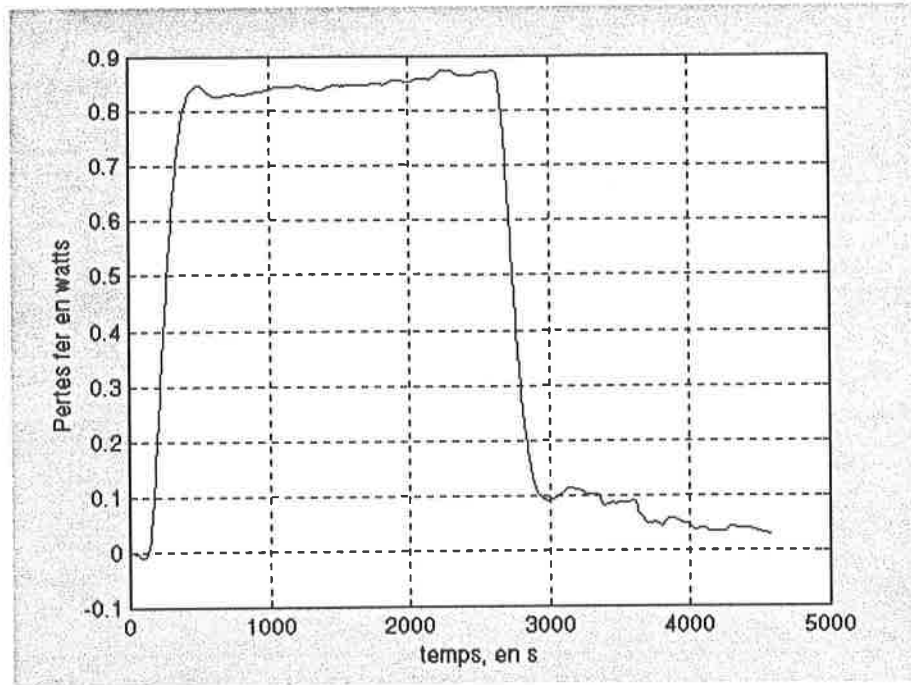


Figure 74 : *Evolution des sources de chaleur dans le noyau.*

La **Figure 75** représente les pertes calculées dans le bobinage. Le niveau de pertes calculées à partir de ce relevé atteint un niveau d'environ 0.06 Watts . Toutefois malgré l'étalonnage statique, il existe un offset d'environ -0.02 Watts , lors de l'extinction des sources. Les pertes Joule calculées correspondent à la différence entre ces deux niveaux soit :

$$P_j = 0.08 \text{ Watts.}$$

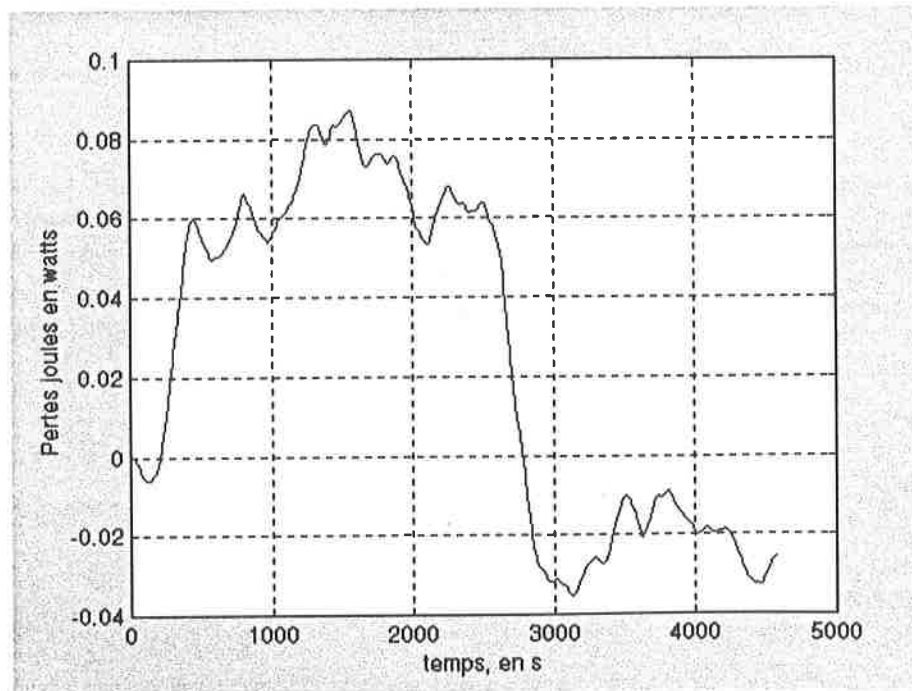


Figure 75 : *Évolution des sources de chaleur dans le bobinage.*

CHAPITRE III

La difficulté de calcul des sources de chaleur dans le bobinage résulte de leur faible valeur relativement à celles du noyau. L'imperfection de la modélisation, ne permet pas d'annuler rigoureusement l'impact de l'échange de chaleur entre le noyau et le bobinage.

Les pertes totales calculées de cette façon seront également tributaires de l'offset, c'est ce que nous pouvons constater sur la **Figure 76**. Le niveau des pertes totales semble être de 0.9 Watts, soit :

$$P=0.9\text{Watts.}$$

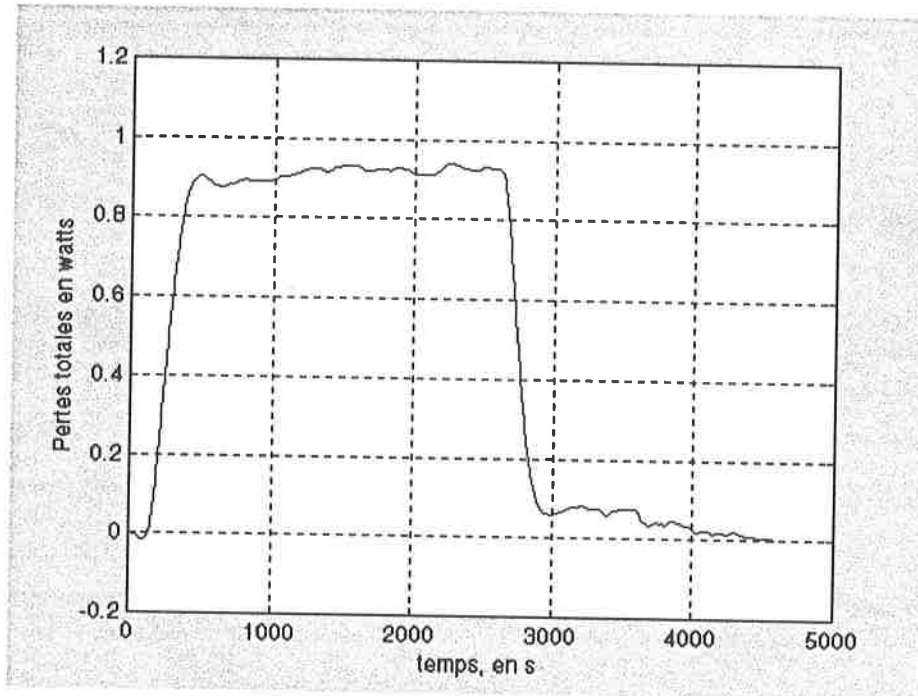


Figure 76 : Evolution des sources de chaleur totales.

- (2) Calculs des pertes à partir de mesures de température et de l'utilisation du modèle thermique stationnaire

L'exploitation des relevés de température, permet de calculer les sources de chaleur présentées à la **Figure 77**, ainsi, en considérant les offset respectifs des courbes calculées nous obtenons :

$$P_j=0.12W$$

$$P_f=0.75W.$$

Pour ce point de fonctionnement les courbes conservent une bonne lisibilité, c'est à dire que nous pouvons observer nettement leurs niveaux de pertes respectifs.

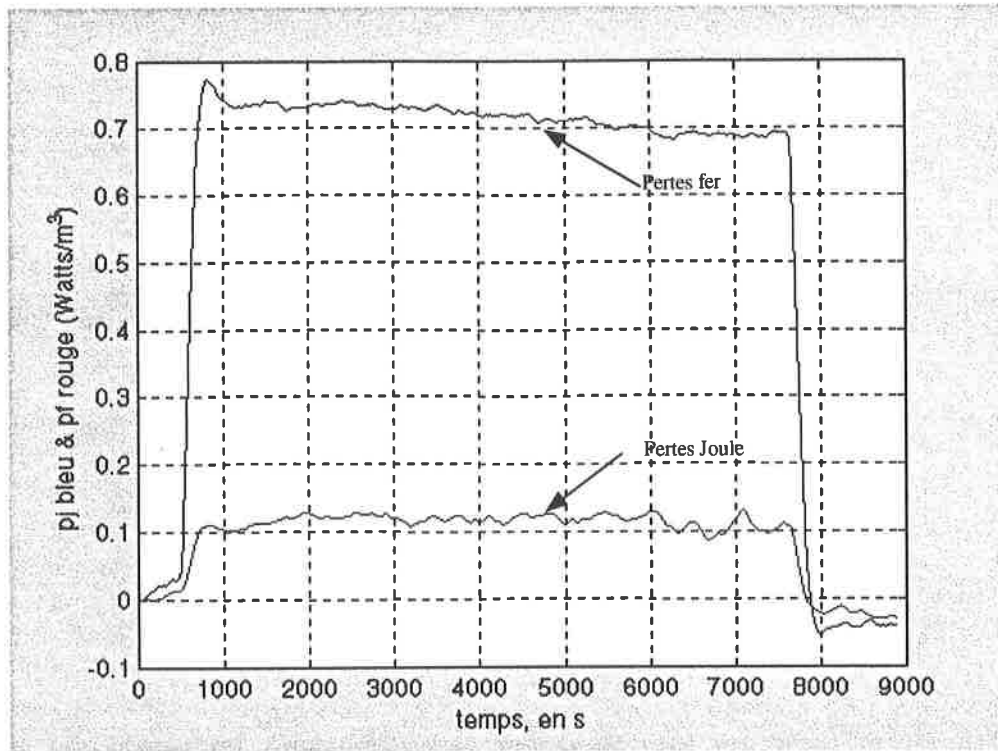


Figure 77 : *Calcul des sources de chaleur dans le bobinage et le noyau à partir de la modélisation thermique stationnaire.*

Les pertes totales sont :

$$P=0.87W$$

La valeur des pertes totales est en accord avec les pertes mesurées à l'oscilloscope. Dans tous les cas traités l'équation de la chaleur complétée par la modélisation thermique stationnaire fournit de bonnes estimations des pertes dans chacun des matériaux, une séparation de la mesure des pertes a donc été obtenue à partir de mesures de température. Pour des fréquences plus élevées les pertes Joule deviennent faibles relativement aux pertes fer, il est alors plus audacieux d'effectuer une séparation fiable, puisque le bruit de mesure noie alors la mesure.

D. Conclusion

Une méthode originale de calcul des sources de chaleur à partir de mesures de température a été présentée. Cette méthode permet d'intégrer à l'équation de la chaleur les échanges thermiques avec l'extérieur, ou plus généralement les couplages thermiques, par le biais de constantes de temps thermiques. Cette méthode, issue des travaux de thermomécaniciens, a été transposée au calcul des pertes dans les inductances. Nous avons comparé les résultats obtenus par cette méthode avec des mesures électriques et des calculs, sur un bobinage dans l'air. Les comparaisons montrent une bonne concordance. Nous avons donc prolongé la méthode en proposant d'intégrer à l'équation de la chaleur la modélisation thermique stationnaire, cette formulation apporte une nette amélioration sur le calcul des sources de chaleur et en étend le domaine de validité.

Cela nous a incité à poursuivre la transposition au calcul des pertes d'un composant plus sophistiqué comprenant un bobinage et un noyau, tous deux sièges de pertes, qu'il est difficile de discriminer par des mesures électriques. Les comparaisons entre les pertes estimées dans chacun des constituants et celles obtenues par la méthode de calcul des sources de chaleur, ont montré une bonne concordance. Là encore, l'utilisation du modèle thermique stationnaire dans l'équation de la chaleur apporte une amélioration dans le calcul des sources de chaleur.

Concernant les deux méthodes de calcul des sources de chaleur, celle qui nécessite l'identification des constantes de temps thermique a montré ses limites lorsque l'excursion en température était importante. La méthode basée sur la modélisation thermique, qui se voulait rigoureuse, des échanges de chaleur offre une extension intéressante de la première méthode pour les raisons suivantes :

- une modélisation statique rigoureuse suffit à décrire le comportement dynamique,
- cette approche ne nécessite aucun a priori mais une connaissance précise de la géométrie et des caractéristiques thermophysiques des matériaux,
- du fait de la modélisation thermique stationnaire, elle peut être adaptée à tous les composants bobinés à noyau torique, sans ajustement expérimental préalable.

CHAPITRE III

Cette étude, basée sur des mesures par thermocouple a permis de montrer sa faisabilité pour des exploitations plus poussées, qui pourraient porter sur :

- des mesures de température locales sur un noyau, dont on pourrait extraire la répartition des lignes de champ via la répartition des sources de chaleur (des travaux sur ce thème sont entrepris en collaboration avec le CETHIL cf.[32]),
- une étude locale sur un conducteur, nécessitant un appareillage plus sophistiqué, tel qu'une caméra infrarouge, mais qui permettrait de valider des répartitions de courant via la localisation des sources de chaleur,
- les mesures de pertes en très hautes fréquences sont possibles puisque la température porte le message de l'énergie dissipée à notre échelle de temps, sans être tributaire des problèmes de bande passante (précision constante sur toute la plage de mesure),
- les mesures de pertes pour des formes quelconques des grandeurs électriques,
- application à des composants dont la connaissance globale des pertes (et a fortiori locale) est difficile à déterminer, c'est le cas du condensateur,
- gestion des transitoires de température dans la prévention de court-circuit, ou bien de défaillance de matériel.

Bien que notre contribution soit modeste la liste des utilisations de l'outil "modélisation thermique instationnaire" est longue. Il se présente comme un outil d'analyse des phénomènes physiques polyvalent.

E. Bibliographie

- [26] A.Chrysochoos, "Analyse du comportement des matériaux par thermographie infrarouge", Photomécanique 95 : Etude du comportement des matériaux et des structures, éditions Eyrolles, mars 1995.
- [27] H. Louche, Thèse de doctorat, "Analyse par thermographie infrarouge des effets dissipatifs de la localisation dans des métaux", Université Montpellier II, Janvier 1999.
- [28] X. Ballandraud, E. Ernst, E. SOOS, "Phénomènes rhéologiques dans les alliages à mémoire de forme", 1998.
- [29] Manuel MATLAB, User's guide, Signal Processing Toolbox, version 4, Mathworks inc, 1998.
- [30] "CRC Hanbook of chemistry and physics", CRC Press, USA, 1977-1978.
- [31] Catalogue n°4 Micrometals, "Iron powder cores", 1995.
- [32] S. Chapman, "Determination of the electromagnetic losses in a cylindrical ferrous core", Major project de l'INSA de Lyon, mai 1999.

**Chapitre IV : Nouvelle procédure de dimensionnement :
L'OPTIMISATION**

A. De l'optimisation vers le dimensionnement

1. Formulation d'un problème en termes d'optimisation

a) Introduction

Le fonctionnement des composants magnétiques utilisés dans un circuit d'électronique de puissance est régi par un grand nombre de modèles physiques, qui devraient permettre d'appréhender son état sur les plans : électrique, magnétique, géométrique, thermique, et pourquoi pas économique... Or, qu'en est il actuellement ? Les modèles physiques utilisés dans les procédures de dimensionnement sont soit rudimentaires soit extrêmement sophistiqués. Il y a donc une alternative entre le coefficient de densité de courant, lequel sera censé appréhender le comportement thermique, et les calculs de champ par éléments finis, qui permettront une analyse fine au détriment des interactions entre la température et l'induction par exemple.

Cependant les procédures de dimensionnement sont davantage adaptées à la conception, tandis que les calculs de champ par éléments finis constituent un outil d'analyse physique, notre démarche relève donc de la contribution au dimensionnement.

Or, l'analyse des procédures de dimensionnement classique révèlent des lacunes comme :

- l'unicité de la solution finale alors qu'au cours de la procédure, des variables sont imposées,
- l'imprécision de la modélisation thermique résumée par un coefficient (densité de courant ou puissance surfacique), qui ne rend compte de manière imprécise de l'élévation de température, alors que la température apparaît comme le juge de paix.

En effet, la température doit être maîtrisée puisqu'elle conditionne la durée de vie des matériaux et qu'elle tend à détériorer les performances du composant.

La connaissance des impacts du dimensionnement peut être obtenue à condition de disposer de tous les modèles physiques décrivant le composant. Toutefois il suffit de deux modèles

CHAPITRE IV

physiques, naturellement non linéaires, pour nous dérouter, d'autant plus lorsque les variables sont plus de deux !

Le passage à la résolution numérique est alors indispensable. Mais, pourquoi se contenter du bien si on peut avoir le mieux ? Pour cela, la formulation du dimensionnement en termes d'optimisation s'offre à nous comme une voie attrayante de résolution numérique.

Toutefois, l'optimisation n'est pas un but en soi, les mathématiciens sont bien assez ingénieux et compétents pour faire évoluer les méthodes d'optimisation. Ainsi, notre intérêt se portera sur la formulation de problèmes d'électrotechnique en termes d'optimisation.

b) *Syntaxe d'un problème d'optimisation*

Un problème d'optimisation, consiste à déterminer les composantes d'un vecteur des variables (u) permettant de minimiser (ou maximiser) un but ou fonction objectif ($f(u)$), tout en respectant des contraintes qualifiées de contraintes égalités (i équations du type $C_i(u) = 0$) et inégalités (j inéquations du type $C_j(u) \leq 0$). On écrit ainsi le problème d'optimisation de la manière suivante : soit $u = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathfrak{R}^n$, on cherche à résoudre :

$$\begin{cases} \min_u f(u) \\ C_i(u) = 0 \\ C_j(u) \leq 0 \end{cases} \quad (115)$$

Le problème est de dimension n et comprend i contraintes égalité. L'ensemble des solutions respectant les contraintes est de dimension $(n-i)$, c'est le domaine de faisabilité. Il y a lieu à optimiser dès lors que la solution n'est plus unique et à plus forte raison lorsque le domaine de faisabilité est de dimension supérieure ou égal à 1.

2. **Formalisation du dimensionnement d'un composant magnétique**

a) *Transposition du problème de dimensionnement*

Un problème de dimensionnement peut se mettre sous la forme d'un problème d'optimisation, mais le passage de la réalité technologique à l'abstraction d'un problème d'optimisation

CHAPITRE IV

présente des singularités. Le vecteur des variables u est constitué des variables du dimensionnement ; citons de façon non exhaustive, le diamètre des conducteurs, le nombre de spires, la température moyenne, la forme du noyau, le champ d'induction maximal ou encore le matériau. Première confrontation avec le concret : les variables sont à la fois discrètes (forme du noyau, choix du matériau, dimensions du noyau...) et continues (température, champ d'induction maximal...), cela implique que nous ne pourrions pas nous contenter d'utiliser un code de calcul, qui ne tiendrait pas compte des particularités du dimensionnement.

Ensuite, les objectifs à minimiser sont nombreux et souvent antagonistes (Pertes, volume...), la fonction objectif n'est plus unique. En effet, lors de la minimisation d'une grandeur, l'incidence sur les autres grandeurs (le volume, le coût...) doit être minimisé. Considérons un conducteur de cuivre, en minimisant les pertes cela conduit à accroître la section du conducteur ce qui grève le volume et i.e. le coût. Nous sommes dans le cas d'une optimisation multicritère, qui peut se ramener à une fonction objectif constituée d'une somme pondérée des critères à minimiser. Toutefois, à la différence des problèmes mathématiques les fonctions objectifs ne sont pas des fonctions mathématiques mais des grandeurs physiques dont les unités diffèrent. Ainsi d'une part les critères pertes, coût, volume s'exprimeront respectivement en watts, euros et m^3 mais d'autre part les ordres de grandeurs différeront sensiblement et pour un composant donné on aura des pertes en watts, un coût en dizaine d'euros et un volume en $10^{-6} m^3$. Dans ces conditions il faut songer à une formulation appropriée de la fonction objectif à minimiser.

Enfin, les contraintes égalité correspondent aux lois physiques qui régissent le comportement du composant. Ces lois physiques sont en relation avec l'utilisation du composant. Dans le cas des composants magnétiques utilisés comme inductance, il est nécessaire de modéliser le volume les pertes, le coefficient d'inductance et l'évolution de la température. Les descriptions physiques n'existent pas toujours, c'est pour cela qu'au préalable notre travail s'est intéressé à la modélisation thermique dans le but de l'affiner. C'est une particularité de l'optimisation, la validation expérimentale des modèles est un préalable à l'optimisation et non une finalité.

CHAPITRE IV

Quant aux contraintes inégalité, elles représentent surtout les butées sur les variables ($d_c > 0$, $N > 0$...) ou l'étendue des valeurs acceptables d'une variable ($T_{\min} < T < T_{\max}$). Le concepteur bénéficie alors d'une grande souplesse puisqu'il peut imposer ses contraintes dans la formulation de l'optimisation (par exemple $\text{volume} < V_{\max}$) au lieu d'en constater le résultat à l'issue du dimensionnement.

B. Résolution d'un problème mathématique d'optimisation

1. Algorithmes de minimisation

Les algorithmes de minimisation permettent de rechercher l'extremum d'une fonction de plusieurs variables, soit résoudre des problèmes du type :

$$\min_u f(u) \text{ avec } u \in \mathfrak{R}^n \quad (116)$$

L'intérêt des mathématiciens pour ces problèmes est orienté sur les problèmes linéaires de grande dimension (des millions de variables !), et sur la recherche de l'extremum global. Ils s'évertuent donc à trouver des algorithmes robustes qui rendent la recherche de l'extremum global possible pour des problèmes de grande dimension non linéaires et présentant un grand nombre d'extrema. La **Figure 78**, extraite de [34], met en relief une fonction comportant plusieurs minimums (et maximums). Avec ce genre de fonction, la recherche du minimum global s'avère délicate. Dans nos problèmes les fonctions seront tout simplement convexes.

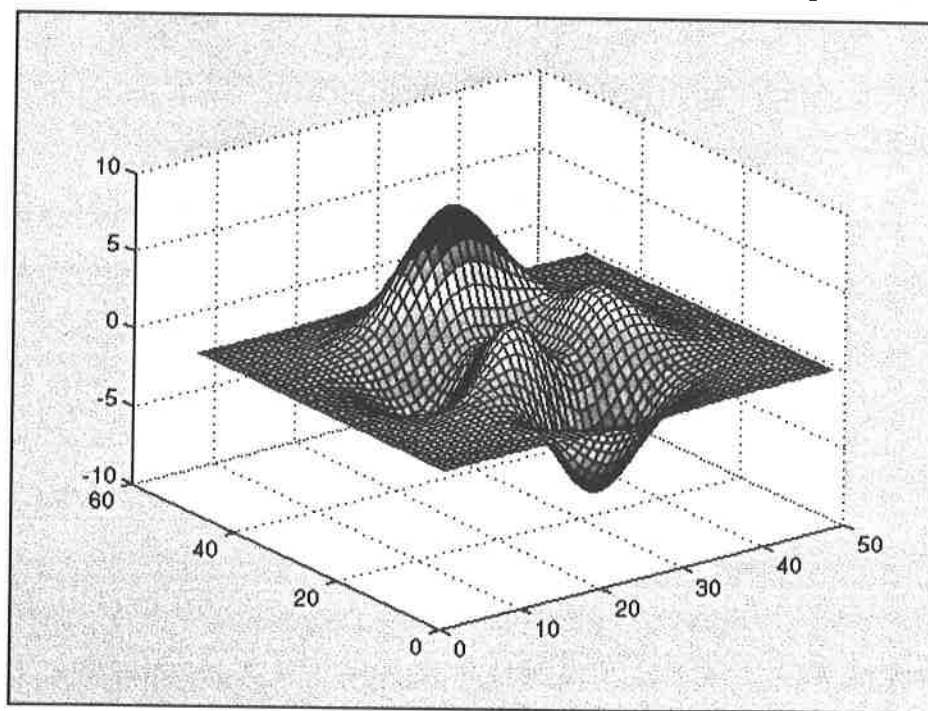


Figure 78 : Exemple de fonction présentant plusieurs minimums.

CHAPITRE IV

Lorsque le minimum se trouve dans un voisinage du point de départ mais n'est pas le minimum global, il est tout simplement qualifié de minimum local. Les modèles physiques décrivant les composants magnétiques sont à base de fonctions simples : polynôme et fractions. Nous ne nous sommes donc pas intéressés à la recherche de minimum global, bien que de simples modifications (recuit simulé) sur des algorithmes de descente puissent suffire.

a) *Méthodes directes*

Les variables prennent des valeurs discrètes résultant de la discrétisation ou de l'encodage de l'intervalle d'exploration des variables. La fonction objectif est évaluée. Sur ce principe reposent notamment les méthodes dites de balayage, heuristiques et génétiques. La différence porte d'une part sur la représentation des variables et d'autre part sur la sélection du minimum. Ces méthodes présentent comme inconvénient de figer l'espace d'exploration et nécessitent la recherche d'un compromis rapidité précision. En revanche, elles sont robustes, c'est à dire adaptées à des problèmes différents, et lorsque la discrétisation est assez fine, elles permettent de trouver le minimum global dans l'espace d'exploration.

(1) Méthode par balayage

Son principe est très simple : les variables sont discrétisées, la recherche du minimum s'effectue par comparaison des valeurs prises par la fonction objectif, pour chaque vecteur des variables. Ces méthodes sont lentes et peu précises (pour avoir une bonne précision il faut un pas de discrétisation petit, le nombre d'évaluation de la fonction devient alors prohibitif), mais peuvent s'avérer utiles lorsque le nombre de variables discrétisées n'est pas trop important.

(2) Méthode heuristique

Elle est très proche de la méthode par balayage, mais au lieu d'effectuer un passage en revue méthodique des variables, les valeurs des variables sont obtenues par tirage au sort. La sélection du minimum reste identique.

(3) Algorithme génétique

Ces techniques sont inspirées des théories de la sélection génétique [43], [44] & [45]. Les variables sont codées sur n bits sur la plage d'exploration. La première étape consiste à générer de manière aléatoire une population initiale comportant un nombre k d'individus. Cette population va subir une première sélection par reproduction. Lors de cette sélection, le choix aléatoire d'un individu parmi k est pondéré par le critère d'adaptation de l'individu (par

exemple la maximisation d'une fonction $f(x)$). La reproduction est réitérée k fois de façon à ce que la nouvelle population comporte k individus dont les moins adaptés tendent à être exclus. La sélection suivante est le croisement entre les individus. Les individus sont appariés de manière aléatoire, leurs chaînes sont scindées en deux puis échangées, de part et d'autre d'un emplacement (noté l sur la **Figure 79**), obtenu par un tirage aléatoire. L'étape finale est une mutation. La mutation porte sur un caractère de la chaîne (en binaire mutation du 0 en 1 et vice versa), avec une fréquence donnée par l'utilisateur (une mutation tous les $1/f$ caractères).

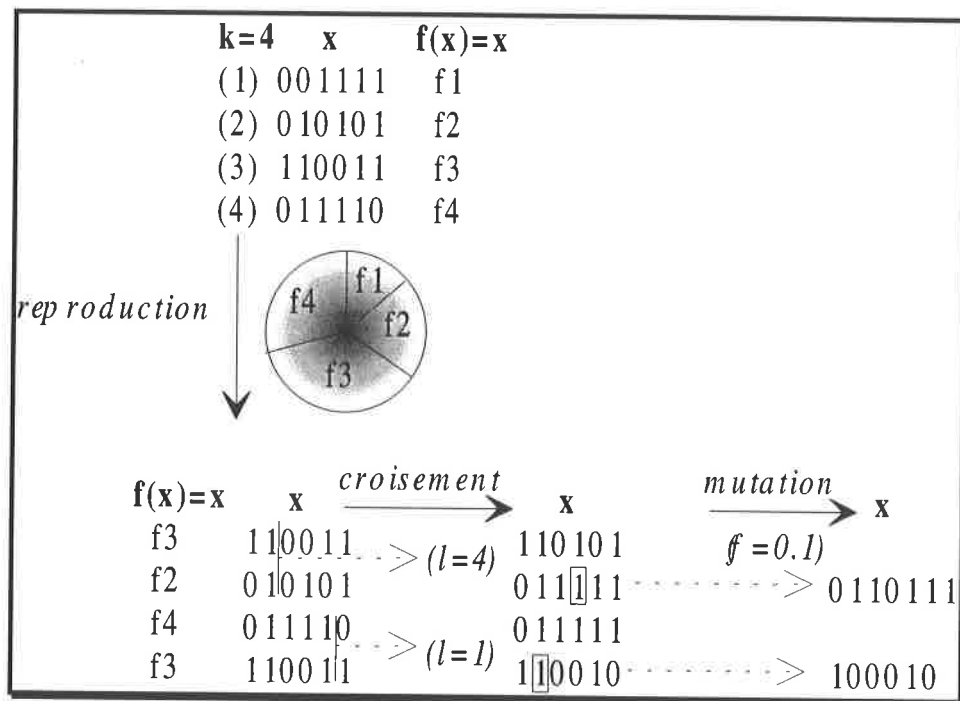


Figure 79 : Succession des opérations effectuées par un algorithme génétique.

Cet algorithme est illustré par l'exemple de la **Figure 79**, pour lequel le gène est codé sur $n=6$ bits, une population initiale comprenant $k=4$ membres. A l'issue de la reproduction il reste les individus 2 3 et 4. Les individus 2 & 3 et 3 & 4 sont appariés, puis leurs chaînes sont scindées et échangées respectivement aux emplacements $l=4$ et $l=1$. On remarque que les individus issus de la sélection sont d'ores et déjà différents de leurs géniteurs. Enfin des mutations se produisent à une fréquence $f=0.1$ soit un caractère sur 10. Les mécanismes de sélection sont réitérés jusqu'à satisfaction d'un test de convergence. Les algorithmes génétiques sont d'ailleurs l'occasion de tests de convergence inhabituels, comme cesser les sélections lorsqu'il apparaît une population pour laquelle l'écart type de la fonction d'adaptation de chaque individu est suffisamment faible. L'utilisation d'algorithmes génétiques est bien adaptée à la recherche de minimum global, mais lorsque le problème d'optimisation comporte des contraintes, leur prise en compte est délicate. Par ailleurs, il faut que la population soit

importante pour qu'il n'y ait pas une dégénérescence des descendants. Or, lorsqu'on choisit le matériau d'un noyau le nombre de possibilités est restreint, l'utilisation d'algorithmes génétiques peut ne pas être adéquate. L'algorithme génétique semble être la meilleure méthode pour localiser un minimum local avec un temps de calcul acceptable. Un algorithme génétique issu de [45] a été utilisé.

b) *Présentation des méthodes de descente*

Ces méthodes ont des bases théoriques qui permettent de démontrer leur convergence dans des cas particuliers, tels qu'un problème quadratique ou convexe. Toutefois cette convergence est dirigée vers un minimum local. Un vecteur u_0 initial sert de point de départ à ces algorithmes, et le minimum obtenu se trouve dans le voisinage du minimum, ce qui permet, à partir d'un développement de Taylor, de se ramener à un problème quadratique. Cependant ces algorithmes convergent pour un grand nombre de problèmes non-quadratiques.

Considérons le vecteur de départ u_0 , une direction de descente d_0 est calculée à partir de ce vecteur. Un pas a_0 de descente dans la direction d_0 aboutit à un nouveau vecteur u_1 . Il en est de même par récurrence pour tout nouveau vecteur u_{k+1} selon :

$$u_{k+1} = u_k + a_k d_k \quad (117)$$

Le pas de descente a_k doit être calculé à chaque itération k , de façon à descendre au maximum dans la direction d_k . Le pas de descente peut être fixé, mais la convergence risque alors d'être lente ou instable, ou calculé pour optimiser la descente. Dans ce dernier cas, il peut être déterminé par une simple dichotomie, puisque le problème est monodimensionnel (a_k est un scalaire), ou mieux encore par une méthode de Newton-Raphson. C'est cette dernière que nous avons retenue. Ensuite, les méthodes diffèrent essentiellement par le calcul de la direction de descente. Nous ne présenterons que celles que nous avons éprouvées.

(1) Calcul du pas de descente optimal : méthode de Raphson-Newton

Le pas de descente optimal est tel qu'il minimise la valeur de la fonction objectif dans la direction de descente calculée. Le problème monovariable à résoudre est donc le suivant :

$$\min_{a_k} f(u_k + a_k d_k)$$

Ceci revient à calculer a_k au sein d'une itération de façon à ce que :

$$\frac{\partial f(u_k + a_k d_k)}{\partial a_k} = 0$$

Le développement de Taylor à l'ordre 2 de la fonction, en a voisin de a_0 s'exprime :

$$f(a) \approx f(a_0) + f'(a_0)(a - a_0) + f''(a_0) \frac{(a - a_0)^2}{2}$$

La dérivation de cette relation donne :

$$f'(a) \approx f'(a_0) + f''(a_0)(a - a_0)$$

De l'annulation de la dérivée ($f'(a)=0$), découle :

$$a = a_0 - \frac{f'(a_0)}{f''(a_0)}$$

Ainsi, à partir d'une valeur initiale a_0 on peut calculer les termes suivants de manière itérative selon :

$$a_{k+1} = a_k - \frac{f'(a_k)}{f''(a_k)} \tag{118}$$

Et ce, jusqu'à obtenir une valeur proche du pas de descente optimal a_{opt} . On peut soit effectuer un test de convergence, soit fixer le nombre de boucles de calcul.

(2) Méthode de la plus grande pente

Cette méthode découle d'un développement de Taylor à l'ordre 1 de la fonction à minimiser. La fonction est supposée continûment différentiable sur \mathfrak{R}^n . Considérons u dans un voisinage de u_0 :

$$f(u) \approx f(u_0) + \nabla f(u_0)'(u - u_0)$$

CHAPITRE IV

Exprimons l'équation de la "tangente" passant par u_0 et dont la pente est donnée par le gradient de la fonction en u_0 :

$$u = -a \nabla f(u_0) + u_0$$

Lorsqu'on substitue l'équation de la tangente dans le développement de Taylor précédent, la fonction s'exprime :

$$f(u) \approx f(u_0) - a \|\nabla f(u_0)\|^2$$

Il apparaît alors que si le coefficient a est positif (et assez "petit" pour que l'approximation du développement de Taylor reste valable), le terme $a \|\nabla f(u_0)\|^2$ est positif. Alors, le gradient de la fonction sera une direction de descente puisque $f(u) < f(u_0)$. Le calcul de chaque nouveau vecteur est mené par la relation récurrente suivante :

$$u_{k+1} = u_k - a_k \nabla f(u_k) \tag{119}$$

Par conséquent la direction de descente est :

$$d_k = -\nabla f(u_k).$$

Cette méthode assure la convergence, mais avec un grand nombre d'itérations, elle est donc très lente, et converge très difficilement lorsque le point de départ est choisi éloigné de l'optimum.

(3) Méthode de Newton

La méthode de Newton découle d'une généralisation de la méthode de Raphson-Newton à l'ordre n . Considérons le développement de Taylor, en u , de $f(u)$ à l'ordre 2 au voisinage de u_0 , ainsi que l'expression de $\nabla f(u)$:

$$f(u) \approx f(u_o) + \nabla f(u_o)'(u - u_o) + \frac{1}{2}(u - u_o)' \nabla^2 f(u)(u - u_o) \quad (120)$$

$$\nabla f(u) \approx \nabla f(u_o) + \nabla^2 f(u)(u - u_o)$$

Cette approximation implique que localement la fonction se comporte comme une fonction quadratique. La minimisation dans le voisinage de u_o se déduit de l'annulation du gradient : $\nabla f(u) = 0$. Le nouveau vecteur u se déduit ainsi de (120) :

$$u = u_o - (\nabla^2 f(u_o))^{-1} \nabla f(u_o)$$

La direction de descente est :

$$d_o - (\nabla^2 f(u_o))^{-1} \nabla f(u_o).$$

Celle ci n'étant pas nécessairement une direction de descente, puisqu'elle résout uniquement l'annulation du gradient, nous forçons la descente à chaque itération par le calcul d'un pas optimal. Le calcul de chaque nouveau vecteur est mené par la relation récurrente suivante :

$$u_{k+1} = u_k - a_k (\nabla^2 f(u_k))^{-1} \nabla f(u_k) \quad (121)$$

Par la méthode de Newton, la convergence vers la solution optimale d'une fonction quadratique est obtenue en une itération. Le point faible de la méthode de Newton est le calcul de l'inverse du Hessien.

(4) Méthode de Quasi-Newton

Pour éviter l'inversion du Hessien, les mathématiciens ont proposé un moyen de calculer de façon itérative une direction de descente de la forme

$$d_k = -S_k \nabla f(u_k).$$

Ces méthodes s'inspirent de la méthode de Newton puisque les matrices S_k convergent vers l'inverse du Hessien $((\nabla^2 f(u_k))^{-1})$. L'origine de cette méthode est détaillée dans [33], nous

CHAPITRE IV

n'en présenterons que les aspects nécessaires à sa mise en œuvre. Les nouvelles composantes du vecteur sont calculées de manière récurrente selon :

$$u_{k+1} = u_k - a_k S_k \nabla f(u_k)$$

A cette itération on peut calculer les paramètres :

$$\begin{aligned} \delta_k &= u_{k+1} - u_k \\ \gamma_k &= \nabla f(u_{k+1}) - \nabla f(u_k) \end{aligned}$$

L'expression de la matrice S_{k+1} calculée à l'itération $k+1$ fait intervenir les vecteurs définis ci-dessus. Plusieurs relations récurrentes sont proposées, notamment la matrice de correction de rang 1 :

$$S_{k+1} = S_k + \frac{(\delta_k - S_k \gamma_k)(\delta_k - S_k \gamma_k)'}{(\delta_k - S_k \gamma_k)'}$$

La matrice de départ de l'algorithme S_0 peut être choisie égale à la matrice identité. Les variantes existantes sont rassemblées sous l'appellation "Famille de Broyden". Les plus efficaces sont celle proposée par David-Fletcher-Powell, nommée méthode DFP (122), ainsi que celle proposée par Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno, nommée méthode BFGS (123) :

$$S_{k+1} = S_k + \frac{\delta_k \delta_k'}{\delta_k' \gamma_k} - \frac{S_k \gamma_k \gamma_k' S_k}{\gamma_k' S_k \gamma_k} \quad (122)$$

$$S_{k+1} = S_k + \left(I + \frac{\gamma_k' S_k \gamma_k}{\delta_k' \gamma_k} \right) \frac{\delta_k \delta_k'}{\delta_k' \gamma_k} - \frac{\delta_k \gamma_k' S_k + S_k \gamma_k \delta_k'}{\delta_k' \gamma_k} \quad (123)$$

(5) Bilan sur les caractéristiques de ces méthodes

La méthode de la plus grande pente assure la convergence, mais avec un grand nombre d'itérations, elle est donc très lente, et converge très difficilement lorsque le point de départ est choisi éloigné de l'optimum. Par la méthode de Newton, la convergence vers la solution optimale d'une fonction quadratique est obtenue en une itération. Pour d'autres fonctions cette

méthode combinée à une recherche du pas de descente optimale donne d'excellents résultats. Une comparaison entre les différentes méthodes sur la fonction dite "Rosenbrock banana" est présentée dans [33]. Il est montré que la méthode de Newton est la plus performante en termes de nombre d'itérations. Toutefois, il est plus intéressant de comparer les résultats en CPU. En effet, la méthode de Newton nécessite l'inversion du Hessien qui est coûteux en temps de calcul. Bien que pour des problèmes de taille modeste comme les nôtres, ce coût supplémentaire soit insignifiant. C'est en raison de l'inversion du Hessien que les mathématiciens ont développés les méthodes de Quasi-Newton. Celles ci calculent de manière itérative une approximation de l'inverse du Hessien. Bien que des propriétés de convergence différentes soient démontrées selon les variantes, lors de leur utilisation , nous avons observé des performances similaires entre elles. La méthode de descente retenue est la méthode de Newton combinée à une recherche de pas optimal par une méthode de Newton-Raphson. En outre, un second algorithme est utilisé en parallèle de nos routines d'optimisation de façon à corroborer les résultats obtenus. Nous utilisons, en raison de sa robustesse et de sa rapidité, un algorithme génétique [45].

2. Transformation d'un problème d'optimisation en problème de minimisation

Les méthodes présentées sont adaptées à la recherche du minimum d'une fonction de plusieurs variables, soit le problème (116). Il faut donc recourir à une transformation du problème initial (115). En fait, il existe aussi des algorithmes permettant de résoudre directement le problème d'optimisation, mais seules les méthodes de transformation seront abordées ici. Leur principe consiste à intégrer dans la fonction objectif les contraintes, de manière à se ramener à un problème de minimisation tel que (116). Nous privilégierons la présentation des transformations portant sur la contrainte égalité pour ne pas alourdir la syntaxe, puisque l'insertion des contraintes inégalités est similaire.

a) Méthode des pénalisations extérieures

Considérons le problème d'optimisation ne comportant que des contraintes égalités :

$$\begin{cases} \min_u f(u) \\ Ci(u) = 0 \end{cases} \quad (124)$$

CHAPITRE IV

On a recours a un coefficient R , qualifié de coefficient de pénalisation, auquel on donne une valeur "élevée" (classiquement : $10^2 < R < 10^6$). Le problème transformé s'écrit :

$$\min_u \left\{ f(u) + R \sum_i C_i(u)^2 \right\} \quad (125)$$

Les méthodes de minimisation peuvent ensuite être utilisées pour résoudre le problème ainsi formulé. Lorsque la contrainte égalité est différente de 0, ou violée, alors la fonction à minimiser est augmentée de la valeur de la contrainte multipliée par le coefficient de pénalisation. L'algorithme a donc "intérêt" à annuler la contrainte, pour ensuite minimiser la fonction objectif. Toutefois, la pénalisation est synonyme de dilemme entre la précision de la solution obtenue (i.e. le respect des contraintes) et la stabilité de l'algorithme. Pour cette raison il existe des alternatives pour lesquelles le coefficient de pénalisation évolue au fil des itérations. Cependant, il faut alors introduire de nouveaux coefficients comme dans l'algorithme d'Uzawa [33], mais il est alors difficile de trouver les valeurs des coefficients permettant la convergence. Ces méthodes sont efficaces pour des classes de problèmes donnés (contraintes linéaires, fonction quadratique,...).

Nous avons illustré l'effet de la pénalisation (dite extérieure) sur une fonction simple, représentée tout d'abord sans les contraintes **Figure 80**.

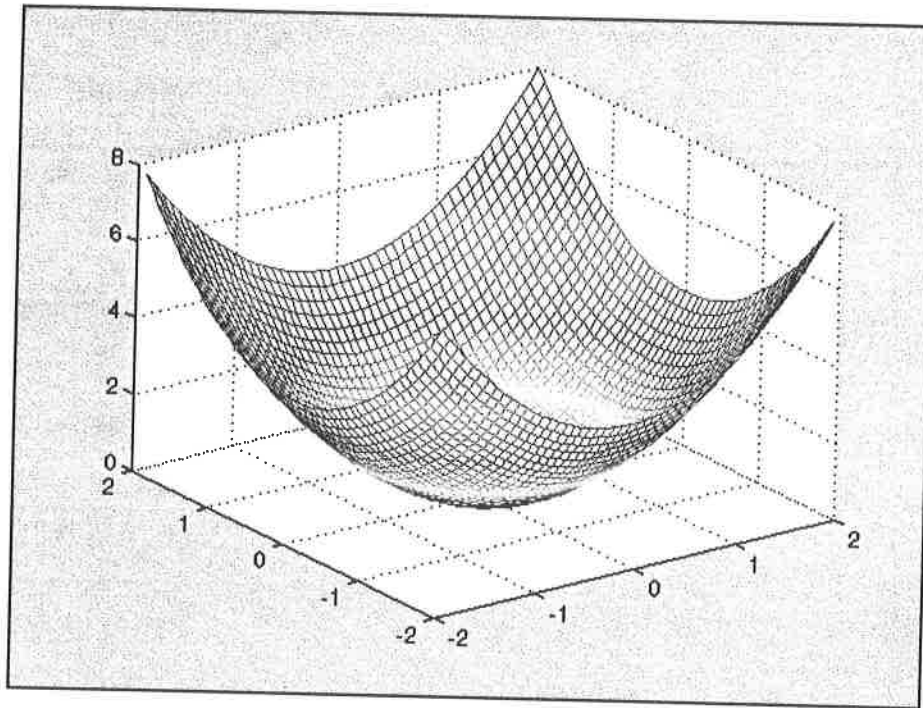


Figure 80 : Représentation d'une fonction F non contrainte.

Ensuite sur la **Figure 81** sont superposées la fonction objectif (semblable à un plan car écrasée par le changement d'échelle) et la fonction pénalisée pour un faible coefficient de pénalisation $R=1$. La vallée correspond au respect de la contrainte $x=y$, la recherche du minimum est donc orientée vers cette vallée, ce qui permet de respecter la contrainte. Lorsque la valeur du coefficient de pénalisation est augmentée les parois créées de part et d'autre de la fonction, par la pénalisation, deviennent de plus en plus abruptes. En augmentant de manière inconsidérée la valeur du coefficient de la pénalisation, dans le but de respecter la contrainte égalité, on tend à rendre l'algorithme instable. En effet, lors de la minimisation la descente va en quelque sorte faire rebondir le nouveau vecteur de parois en parois, et s'éloigner ainsi de la solution.

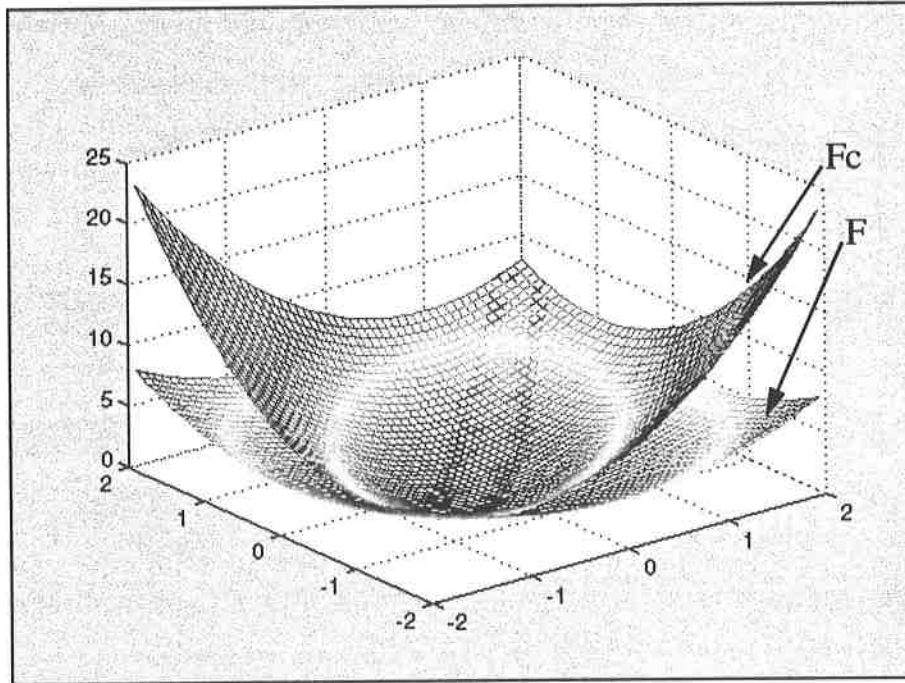


Figure 81 : *Superposition d'une fonction F non contrainte et d'une fonction Fc contrainte.*

b) *Méthode des multiplicateurs de Lagrange*

Les multiplicateurs de Lagrange (notés p_i) sont des variables qui viennent pénaliser la fonction objectif, il y en a autant que de contraintes égalités. On exprime ensuite le lagrangien du problème formulé équation (124) :

$$L(u, p) = f(u) + \sum_i p_i C_i(u).$$

Le problème d'optimisation est équivalent à la minimisation du Lagrangien. Faisant abstraction de la syntaxe mathématique complète, le théorème des multiplicateurs de Lagrange, peut s'interpréter de la façon suivante :

$$\min_{(u,p)} L(u, p) \Leftrightarrow \begin{cases} \nabla_u L(u, p) = 0 \\ \nabla_p L(u, p) = 0 \end{cases} \quad (126)$$

Toutefois, la solution optimale obtenue par la minimisation du Lagrangien correspond à un point selle, il faut alors résoudre un problème de recherche de "minimax" (cf. [33]). En outre, l'introduction des multiplicateurs de Lagrange rajoute autant de variables qu'il y a de

contraintes égalités, bien que ce ne soit pas prohibitif pour nos problèmes. Pour ces raisons, on associe au Lagrangien une pénalisation. Des algorithmes de Lagrangien augmenté sont proposés dans les ouvrages [33]. Nous avons cependant pris la dénomination au pied de la lettre, et nous avons essayé de combiner simplement une pénalisation et un Lagrangien, afin de transformer nos problèmes d'optimisation en problèmes de minimisation. Cette solution n'est pas discutée dans les ouvrages, car la recherche mène à un point selle. Les algorithmes de Lagrangien augmenté ont été conçus de façon à rechercher le minimum du problème. Il s'est pourtant avéré que la minimisation d'un Lagrangien et d'une pénalisation, menée par un algorithme de Newton permettait de trouver la solution optimale du problème initial.

c) *Méthode de transformation hybride proposée*

La méthode de transformation proposée, permet de résoudre le problème d'optimisation initial par résolution du problème de minimisation suivant :

$$\min_{(u,p)} \left\{ f(u) + \sum_i (p_i C_i(u) + R C_i(u)^2) \right\} \quad (127)$$

D'après (126), la minimisation ci-dessus équivaut à trouver la solution de l'annulation des composantes du gradient vis à vis des variables u , ainsi que des multiplicateurs de Lagrange p . Cette dernière condition mène à un système d'équations tel que chacune des i contraintes égalité égale 0 :

$$\begin{aligned} \nabla_p (f(u) + \sum_i (p_i C_i(u) + R C_i(u)^2)) &= 0 \\ \Rightarrow C_i(u) &= 0 \end{aligned}$$

Ainsi d'une part la minimisation du Lagrangien du problème mène à rechercher un point selle vérifiant les contraintes égalité, et d'autre part la pénalisation oriente la convergence vers le minimum indépendamment des conditions de stationnarité.

Pour un ensemble de problèmes éprouvés dont la solution était connue, cette méthode de transformation combinée à un algorithme de Newton ou de Quasi-Newton, a mené à la solution optimale. Il faut en effet que l'algorithme de minimisation soit apte à trouver la

CHAPITRE IV

solution d'un problème de minimax. Comme ce n'est pas le cas de la méthode de la plus grande pente, des méthodes de balayage et des algorithmes génétiques, ils ne peuvent être employés à minimiser le problème ainsi transformé.

La résolution à partir de cette transformation permet de donner au coefficient de pénalisation une valeur peu élevée, donc une meilleure stabilité de l'algorithme, tout en aboutissant à une solution optimale offrant un respect parfait de la contrainte. Il n'y a ainsi plus de dilemme précision stabilité. Toutefois, le nombre de multiplicateurs de Lagrange augmente d'autant la dimension du vecteur des variables (i.e. la dimension des matrices à brasser), c'est pourquoi cette solution n'est probablement adaptée qu'à des problèmes d'optimisation de faible dimension.

d) *Pénalisation des contraintes inégalité*

La prise en compte de contraintes inégalités est semblable à celle des contraintes égalités. La transformation par une pénalisation lorsque la contrainte n'est pas respectée, est la plus simple des transformations. Considérons, pour simplifier la syntaxe, un problème d'optimisation ne comportant qu'une fonction objectif et des contraintes inégalités, l'implémentation de ces dernières se fait de la façon suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_u f(u) \\ C_j(u) \leq 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \min_u \left\{ f(u) + R \sum_{ij} \max(0, C_j(u))^2 \right\}$$

Un inconvénient de cette formulation est de permettre le franchissement de l'inégalité bien que la fonction objectif soit pénalisée. Il apparaît en effet dans certains cas qu'il est avantageux pour la fonction objectif de dépasser légèrement l'inégalité. Par conséquent cette formulation ne permet pas de respecter de façon fiable les inégalités strictes.

Celles ci peuvent être respectées par la transformation (proposée équation (127)) combinant une pénalisation avec des multiplicateurs de Lagrange. Quant l'algorithme tend à dépasser l'inégalité, la contrainte inégalité devient vis à vis de l'algorithme une contrainte égalité et bénéficiant des qualités exposées, il mènera la recherche en respectant parfaitement l'égalité.

3. Transposition d'un problème mathématique d'optimisation en dimensionnement physique

a) Normalisation

Une des difficultés d'utilisation des méthodes de descente est le choix d'un vecteur de départ initial. C'est un souci réel pour les mathématiciens qui souhaitent résoudre un problème d'optimisation non linéaires comportant de multiples minimums locaux. Notre approche, beaucoup plus pragmatique, consiste à calculer une solution faisable qui sert de point de départ de l'algorithme.

La démarche est :

- inventaire des variables (n),
- plages d'exploration semi-intuitive,
- équations physiques (m)
- Imposer n-m variables ou équations supplémentaires,
- résolution,
- calcul des objectifs.

Le dimensionnement initial ainsi obtenu, peut servir de point de départ au dimensionnement. Cependant, on constate que les variables du dimensionnement (température, diamètre de cuivre, etc.) ont des ordres de grandeur différents de quelques centaines (de °Kelvin) pour la température au millième (de mètre) pour le diamètre de cuivre, aussi il est préférable de les ramener à une échelle unitaire afin d'éviter les problèmes de conditionnement numérique. Pour cela le dimensionnement initial indicé o : $u_o=(N_o, D_o, T_o, \dots)$, sert de base à l'optimisation, par la normalisation des variables :

$$u = (xN_o, yD_o, zT_o, \dots) \tag{128}$$

Les variables de l'optimisation sont alors : (x, y, z, ...). Le point de départ de l'algorithme, est le dimensionnement initial, soit : $u_o=(1, 1, 1, \dots)$. De plus, ce dimensionnement initial, permet de déterminer les performances du composant faisable, par des pertes initiales (P_o), un volume initial (V_o), et un coût initial ($\$o$).

CHAPITRE IV

b) Formulation de la fonction objectif

Les objectifs à minimiser lors du dimensionnement d'un composant magnétique sont classiquement : les pertes (ou le rendement), le volume (ou la masse) et le coût. L'objectif de l'optimisation doit pouvoir répondre à toutes ces exigences combinées. Par conséquent, la fonction objectif doit être composée de tous les critères qu'il est souhaitable de réduire. Pour cela, les unités et les échelles de ces critères doivent être rendues compatibles, afin de comparer des solutions en termes de dizaines de watts et de millièmes de m³. Nous utilisons donc le résultat du dimensionnement initial pour réduire les critères :

$$\begin{aligned} \text{Pertes} &\rightarrow \text{Pertes}/P_o, \\ \text{Volume} &\rightarrow \text{Volume}/V_o, \dots \end{aligned}$$

La fonction objectif résulte alors de la somme pondérée des critères réduits. Toutefois, le fait de sommer les carrés des critères réduits, améliore sensiblement la stabilité de l'algorithme. La fonction objectif s'apparente ainsi à la distance (obj) entre l'origine d'un repère et les points faisables représentés dans un repère ayant pour axes les critères réduits et pondérés.

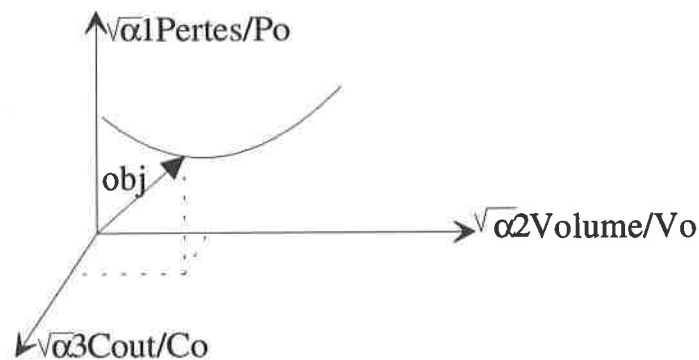


Figure 82 : Illustration d'un compromis quadratique dans le repère des objectifs.

La fonction objectif que nous proposons de former s'explique de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \min_u f(u) &\Leftrightarrow \min_u \left(\sum_i \alpha_i \left(\frac{\text{Critère}(u)_i}{C_{o_i}} \right)^2 \right) & (129) \\ \sum_i \alpha_i &= 1 \end{aligned}$$

CHAPITRE IV

A titre d'exemple, la fonction objectif d'un composant magnétique peut s'expliciter :

$$\min_u f(u) \Leftrightarrow \min_u \left(\alpha_1 \left(\frac{Pertes(u)}{Po} \right)^2 + \alpha_2 \left(\frac{Volume(u)}{Vo} \right)^2 + \alpha_3 \left(\frac{Cout(u)}{Co} \right)^2 \right)$$
$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$$

La solution optimale dépend faiblement du dimensionnement initial retenu lorsqu'il n'est pas trop éloigné de l'optimum, c'est du moins ce que nous avons pu constater sur quelques problèmes simples. En revanche, la pondération influe fortement sur la solution optimale du problème. Cela signifie qu'il existe un ensemble de solutions optimales. C'est l'utilisateur qui va fixer les coefficients de pondération en fonction de sa "sensibilité". Cette formulation permet une grande souplesse. On peut par exemple chercher à réduire les capacités parasites d'un composant magnétique à valeur d'inductance fixée, pour peu que le modèle physique ait été calculé. Nous nous sommes intéressés au problème dual qui consiste à minimiser l'inductance parasite d'un condensateur.

C. Minimisation de l'inductance parasite d'un condensateur à couronnes internes

La montée en fréquence des convertisseurs de l'électronique de puissance au delà de la centaine de kilohertz, s'est révélée très favorable à la réduction du poids et du volume des composants passifs. Ceci a fait apparaître de nouveaux problèmes lors de l'utilisation des composants passifs (inductances et condensateurs) comme filtres ou snubbers. En particulier, l'élargissement du spectre de fréquence des grandeurs électriques (au delà du MHz) requiert une analyse physique des phénomènes. Nous nous sommes appuyés sur une modélisation de l'inductance parasite de **condensateurs à couronnes internes à films métallisés** [35] (Figure 83). Les courants traversant les connexions et le bobinage du condensateur créent des champs magnétiques qui se traduisent par une inductance parasite, et qui peuvent engendrer des oscillations indésirables. Il est, par ailleurs, montré dans [35] que le retour du courant par des couronnes internes permet de réduire l'inductance parasite. Nous nous sommes intéressés à la formulation du problème d'optimisation [36]. Ce problème d'optimisation a été un prétexte à des essais comparatifs des algorithmes d'optimisation précités.

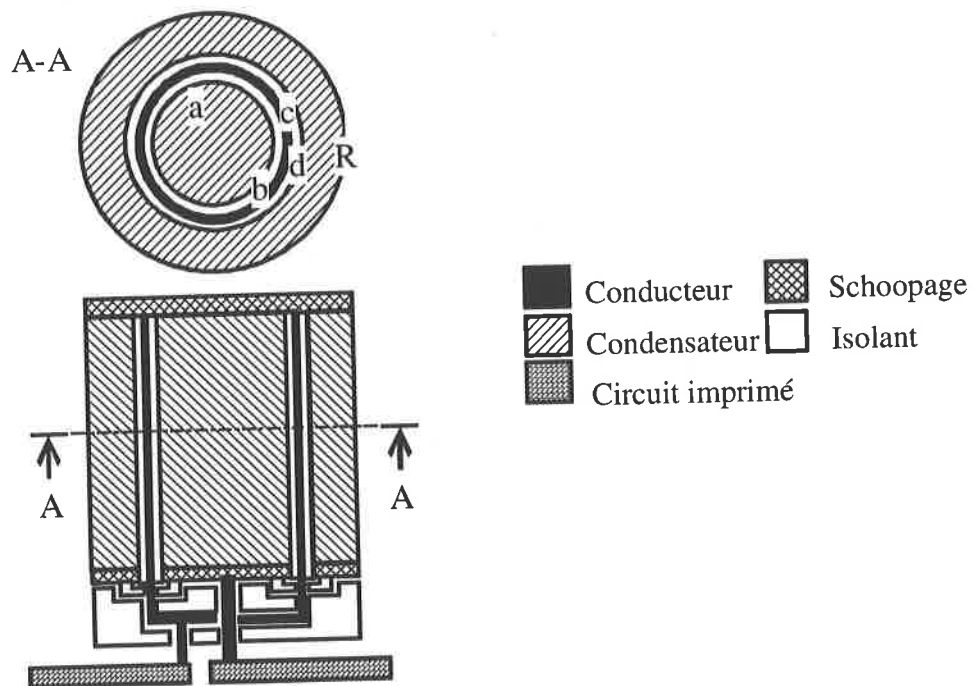


Figure 83 : Condensateur à 1 couronne interne.

a) *Formulation de la minimisation de l'inductance parasite des condensateurs à couronnes internes*

Nous allons considérer un condensateur constitué de $n-1$ couronnes internes, séparant les n éléments bobinés. Le courant total I sera réparti dans ces couronnes, et dans le $i^{\text{ème}}$ conducteur la part de courant est $\alpha_i I$. Pour l'ensemble du condensateur on vérifie donc :

$$\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i = I$$

avec pour chaque couronne $0 \leq \alpha_i \leq 1$. La

Figure 84 représente la structure d'un tel condensateur comportant $n=3$ bobinages élémentaires, et $(n-1)=2$ couronnes internes. Considérons le cas particulier pour lequel le rayon du mandrin est nul ($y_0 = 0$). L'expression proposée dans [35] de l'inductance parasite se simplifie en (131). C'est le cas que nous allons considérer.

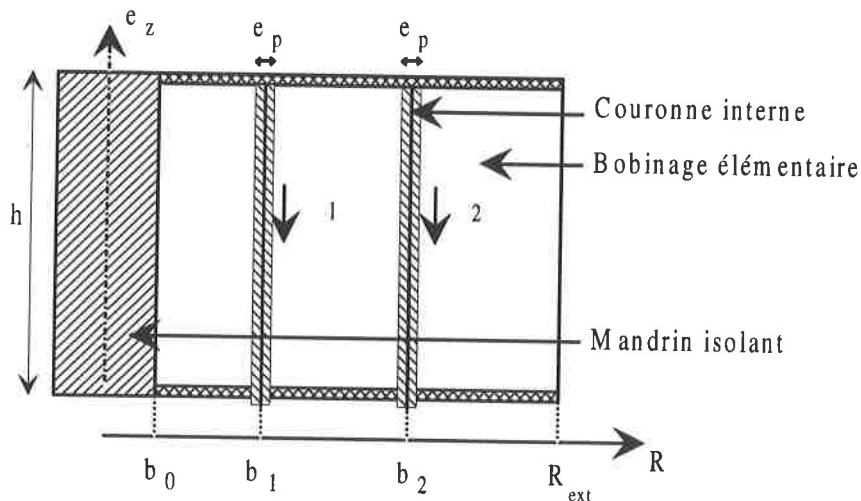


Figure 84 : Coupe d'un condensateur cylindrique comprenant 2 couronnes internes.

Ainsi, en posant $k_i = \sum_{j=0}^{i-1} \alpha_j$, $y_i = \frac{b_i}{R_{ext}}$ et $r = \frac{R}{R_{ext}}$, on montre que l'inductance parasite du condensateur s'exprime :

$$L = \frac{\mu_0 h}{8\pi} \left[1 + 4 \sum_{i=1}^n \left(k_i^2 \ln \frac{y_i}{y_{i-1}} - k_i (y_i^2 - y_{i-1}^2) \right) \right] \quad (130)$$

CHAPITRE IV

Considérons le cas particulier pour lequel le rayon du mandrin est nul ($y_0 = 0$). L'expression proposée dans [35] de l'inductance parasite se simplifie en (131). C'est le cas que nous allons considérer. Ainsi, en posant $k_i = \sum_{j=0}^{i-1} \alpha_j$, $y_i = \frac{b_i}{R_{ext}}$ et $r = \frac{R}{R_{ext}}$, on montre que l'inductance parasite du condensateur s'exprime :

$$L = \frac{\mu_0 h}{8\pi} \left[1 + 4 \sum_{i=1}^n \left(k_i^2 \ln \frac{y_i}{y_{i-1}} - k_i (y_i^2 - y_{i-1}^2) \right) \right] \quad (131)$$

Cette inductance dépend des positions réduites y_i des couronnes internes, ainsi que des portions $\alpha_i I$ traversant les couronnes internes. Les portions de courant sont influencées par le champ magnétique alternatif, mais peuvent être ajustées par la résistivité et l'épaisseur des couronnes internes. En conséquence les variables de l'optimisation sont :

$n - 1$ positions des couronnes internes y_i ($1 \leq i \leq n - 1$)

$n - 1$ portions de courant α_i ($1 \leq i \leq n - 1$)

Les contraintes physiques qui doivent être respectées sont :

contrainte égalité : $\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i = I$,

contraintes inégalités : $0 < y_{i-1} \leq y_i < 1$ (car $y_0=0$ et $y_n=1$)

En toute rigueur, la quantité à minimiser devrait prendre en considération l'effet des couronnes internes sur la valeur du condensateur. La capacité du condensateur pourrait donc être intégrée en tant que contrainte égalité. Mais la valeur du condensateur est liée au volume des éléments bobinés, et les couronnes internes affecteraient faiblement ce volume. Le problème de minimisation de l'inductance parasite se formule de la manière suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{y, \alpha} L = \frac{\mu_0 h}{8\pi} \left[1 + 4 \sum_{i=1}^n \left(k_i^2 \ln \frac{y_i}{y_{i-1}} - k_i (y_i^2 - y_{i-1}^2) \right) \right] \\ \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i - I = 0 \\ 0 \leq y_{i-1} \leq y_i \leq 1 \end{array} \right. \quad (132)$$

b) *résultats de l'optimisation*

Le problème d'optimisation présenté (équation (132)) ne se prête pas à une résolution analytique. Il a donc été le prétexte à l'essai de plusieurs algorithmes. Les méthodes directes par balayage ont été d'emblée écartées, car au delà de 3 variables, la recherche d'une bonne précision nécessitait des calculs pendant de longues heures. Nous avons donc soumis le problème d'optimisation à un algorithme génétique [37], une méthode de Newton, de quasi-Newton et de plus grande pente. La prise en compte des contraintes égalités peut être réalisée analytiquement par substitution, mais nous nous sommes gardés de le faire pour observer la réaction des différents algorithmes et méthodes de transformation.

N=4	AG	Newton	QN
L (nH/m)	2.7095	2.705	2.705
$\sum_1^{n-1} \alpha_j$	0.9954	1	1
N=5	GA	Newton	QN
L (nH/m)	1.5457	1.575	1.575
$\sum_1^{n-1} \alpha_j$	0.99868	1	1
N=6	GA	Newton	QN
L (nH/m)	1.062	1.03	1.03
$\sum_1^{n-1} \alpha_j$	0.9957	1	1

Tableau 8 : Solutions du problème de la minimisation de l'inductance parasite du condensateur à couronnes internes obtenues par Algorithme génétique (AG), de Newton et de Quasi-Newton (QN) pour plusieurs configurations du nombre de couronnes.

Les résultats montrent des résultats similaires pour les trois algorithmes. Tandis que l'algorithme génétique va chercher la meilleure solution au détriment parfois du respect de la contrainte égalité les algorithmes de Newton et Quasi-Newton convergent vers la même solution et respectent parfaitement la contrainte égalité. Pour ce problème le point de départ n'a guère d'influence sur les algorithmes de Newton et Quasi-Newton, néanmoins d'une manière générale, les algorithmes génétiques seront plus robustes vis à vis d'un problème nouveau. Par ailleurs, le nombre d'évaluation de la fonction objectif est moindre avec les algorithmes de descente, ce qui fait qu'ils seront plus rapides qu'un algorithme génétique.

D. Dimensionnement d'une inductance à noyau torique

L'inductance à noyau torique a, depuis le début de ce mémoire fait l'objet de notre attention, les notations employées font référence à la **Figure 3** du chapitre I. Il en est ressorti une modélisation électromagnétique, incluant les pertes Joule en hautes fréquences (équation (24)), le comportement des matériaux magnétiques et une modélisation thermique. En revanche la modélisation ne prend pas en compte les effets capacitifs qui s'avèreraient certainement limitatifs en Hautes Fréquences.

Ces modèles, sous forme analytique, sont complexes. La procédure de dimensionnement doit nécessairement être numérique. De plus, les matériaux disponibles sont nombreux et, sauf pour l'expert, le choix de l'un d'eux relève davantage de la loterie nationale que de la science. Il en est de même pour les formes de noyau.

Nous nous satisferons d'un noyau de forme torique et des matériaux proposés par le constructeur [39].

Les éléments de ce dimensionnement sont :

- un noyau de forme torique,
- une gamme de matériaux magnétiques, (cf . **Annexe 6**)
- une gamme de dimensions géométriques de noyau torique,
- un cahier des charges,
- un dimensionnement initial,
- un modèle thermique,
- un modèle électromagnétique,
- des contraintes,
- deux algorithmes d'optimisation : algorithme de Newton et algorithme génétique [45].

Il nous faut maintenant préciser certains de ces éléments, la manière dont nous les avons agencé ainsi que les résultats obtenus.

1. Définition d'un cahier des charges

Celui ci doit fournir un ordre de grandeur des objectifs (ici, pertes et volume) et des variables. Cela permet de mettre nos objectifs sur une même échelle qui serait réaliste et à la portée de l'utilisateur néophyte. On peut notamment mettre à profit les particularités de notre problème.

CHAPITRE IV

En ce qui concerne l'utilisateur néophyte, l'écriture du cahier des charges pose peu de problèmes. Nous proposons dans un premier temps un cahier des charges qui n'est pas nécessairement associé à une application.

Considérons une alimentation à découpage. L'inductance verra à ses bornes la composante alternative de la tension découpée (illustrée **Figure 85**), sera traversée par un courant de valeur moyenne I_0 et dont la composante alternative a pour valeur efficace ΔI_{eff} (allure de $i(t)$ représentée **Figure 85**).

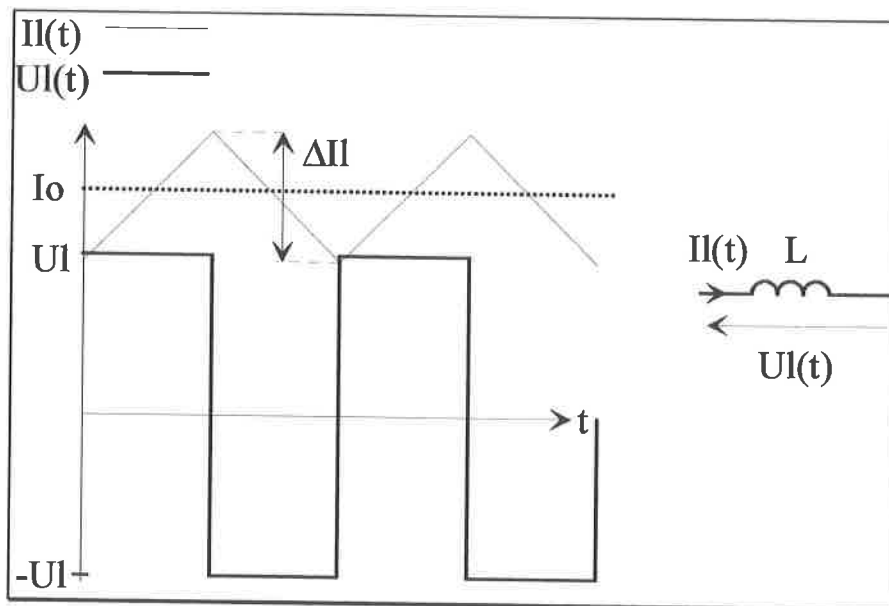


Figure 85 : Représentation du courant et de la tension d'une inductance utilisée dans une alimentation à découpage.

Puisque la modélisation a été validée pour des grandeurs sinusoïdales, précisons les modifications à apporter à celle-ci pour les signaux étudiés.

- tout d'abord, la loi de Faraday devient : $UI = 4\hat{B}NSf$, les pertes fer s'expriment toujours : $P_f = aB^c f^d$. En effet, même si cette formule est valable pour des grandeurs sinusoïdales, les pertes sont dues aux pertes par hystérésis et aux courants de Foucault. Or, les pertes par hystérésis dépendent uniquement de l'amplitude de la variation du champ, à condition que la variation entre les deux extremums soit monotone. En revanche, pour les courants de

Foucault on peut recourir au calcul suivant : $P_{Foucault} = \frac{1}{T} \alpha_P \int_0^T \left(\frac{dB}{dt} \right)^2 dt$. Cependant,

CHAPITRE IV

comme le noyau est à base de poudre de fer, les courants de Foucault sont négligeables, la formule constructeur est donc valable.

- Ensuite, les pertes par effet Joule s'expriment : $P_j = R_{DC} I_o^2 + \sum_{k=1}^{\infty} R_k I_k^2$, où k représente le rang de l'harmonique du courant. Mais, l'allure de $I(t)$, pauvre en harmonique peut être assimilée à un fondamental de valeur efficace $\Delta I_{eff} = \frac{\Delta I}{2\sqrt{3}}$, où ΔI représente l'ondulation crête à crête maximale du courant. Soit $\Delta I(t) \approx -\Delta I_{eff} \sqrt{2} \cos(\omega t)$.
- Enfin, de la contrainte sur l'ondulation de courant crête à crête : $\Delta I \leq 4A$ on déduit la valeur de l'inductance permettant de respecter l'inégalité : $L \geq \frac{UI}{2f\Delta I}$. Nous considérerons la valeur minimale de l'inductance, et la valeur maximale de l'ondulation de courant.

Considérons le cahier des charges suivants :

Tension maximale	UI=20V
valeur moyenne du courant	I _o =10A
Fréquence de découpage	f=20kHz
Ondulation crête à crête du courant	$\Delta I = 4A$
valeur de l'inductance	L=125 μ H
Borne supérieure de la température	T _{cmax} =360°K
Borne inférieure de la température	T _{cmin} =340°K

Tableau 9 :Spécifications du cahier des charges.

Auquel on adjoint les valeurs des constantes scientifiques, les caractéristiques des matériaux et les contraintes de fabrication :

Résistivité du cuivre à 20°C	$\rho = 1.69 \times 10^{-8} \Omega.m$
Coefficient d'expansion de la résistivité	$\alpha = 0.0043^\circ K^{-1}$
Constante de Stéfan Boltzmann	$\sigma = 5.67 \times 10^{-8}$
Emissivité équivalente de la surface du noyau	$\varepsilon = 0.8$
Coefficient de remplissage de la fenêtre	$k_B = 0.65$
Diamètre intérieur minimum	$D_m = D_i / 4$

CHAPITRE IV

N.B. Le diamètre intérieur minimum, correspond à l'espace vide laissé par la machine à bobiner, une fois le bobinage terminé. Cet espace est nécessaire au bon fonctionnement de la machine à bobiner. En l'absence de données précises, la relation proposée n'est qu'une estimation.

Les variables du dimensionnement initial sont :

Choix du matériau	M
Choix de la géométrie	G
Nombre de spires	N
Température de surface du composant	Tc
Diamètre des conducteurs	Dc

2. Procédure de dimensionnement initial

Les variables M et G, relatives au matériau et à la géométrie sont discrètes. Lors, du dimensionnement initial, nous procédons à un balayage permettant d'explorer toutes les combinaisons de matériaux et de géométrie. La taille du catalogue nous permet de le faire, cependant, dans une optique plus générale, les algorithmes génétiques semblent adaptés à la recherche de la meilleure combinaison. A ce sujet, la référence [43] offre une revue claire et exploitable des algorithmes génétiques et d'améliorations pouvant être apportées par les méthodes de nichage.

Puis, la variable Tc, peut être imposée comme température médiane de la gamme imposée par le cahier des charges : $T_{co} = (T_{cmin} + T_{cmax}) / 2 = 350^\circ K$.

Ensuite, nous pouvons calculer le nombre de spires en utilisant l'expression de l'inductance donnée par l'équation (8) du chapitre I. Cette expression fait intervenir les expressions empiriques de la perméabilité relative du matériau en fonction du niveau d'induction. Pour un matériau et une géométrie donnée, le nombre de spires sera donc calculé par résolution de l'équation $L=f(N)$.

Après quoi, on peut s'assurer de la compatibilité du niveau d'induction avec l'induction à saturation du matériau :

$$B < B_{sat}$$

CHAPITRE IV

Finalement, le dimensionnement initial portera sur la recherche de d_{co} , pour une combinaison de géométrie et de matériau donnée. Plus précisément, la variable dc devra être solution du modèle thermique stationnaire, qui peut s'écrire de façon simplifiée :

$$Pj(d_{co}) + Pf = Rth(d_{co})^{-1}(T_c - T_a) \quad (133)$$

Rth résume les éléments de la modélisation thermique (convection et rayonnement). Le modèle thermique utilisé est issu de la modélisation thermique simplifiée donnée par l'équation (69) du chapitre II.

On peut maintenant se poser la question du choix du diamètre à proposer à la routine de recherche du diamètre d_{co} qui satisfait à l'équation (133). Soit on s'inspire d'une valeur de densité de courant classique ($5A/mm^2$), ou bien on détermine le diamètre maximum de dc permettant de remplir la fenêtre disponible pour le bobinage :

$$Sb = \frac{\pi}{4}(Di^2 - Dm^2) = \frac{15\pi}{64}Di^2$$
$$Sb = \frac{\pi}{4k_B} Nodc_{max}^2$$

Cette deuxième possibilité permet également de simplifier l'algorithme. Considérons la valeur de départ de l'algorithme : $u_0 = dc_{max}$, si l'équation thermique vérifie :

$$Pj(dc_{max}) + Pf - Rth(dc_{max})^{-1}(T_c - T_a) > 0$$

Cela signifie qu'il n'existe pas de diamètre permettant d'évacuer les pertes sans dépasser la température imposée à T_c . Pour favoriser la convergence de l'algorithme (i.e. éviter de passer dans la zone de surface de bobinage supérieure à la surface de fenêtre, qui conduit inévitablement à une résolution dans l'ensemble des nombres complexes), il est préférable de choisir un diamètre initial inférieur à la valeur maximale. Les pertes Joule sont calculées pour

CHAPITRE IV

un modèle à N couches selon l'organigramme exposé à la figure 7 du chapitre I. Les pertes fer sont déterminées par l'équation (3) du chapitre I.

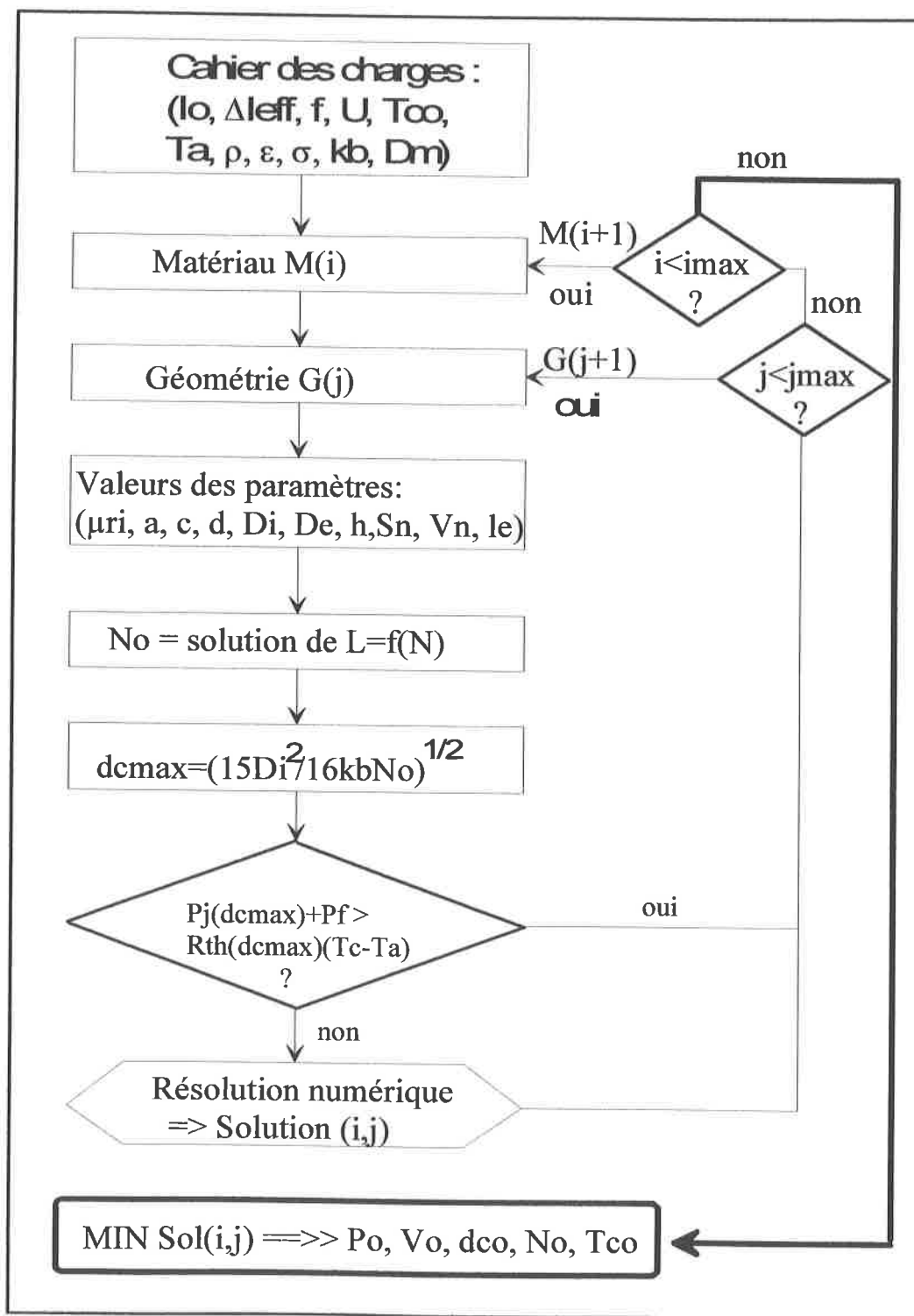


Figure 86 : Algorithme de dimensionnement initial.

Pour le cahier des charges proposé les résultats du dimensionnement initial sont :

CHAPITRE IV

Matériau	Géométrie	No	dco	Tco	Pjo	Pfo	Vco	Vno
n°3	n°24	43	1.55mm	350°K	1.66W	1.72W	2.55 cm ³	2.28 cm ³

Le matériau et la géométrie font référence au catalogue micrometals. Plus exactement, le matériau retenu possède une perméabilité initiale de 55 , et les dimensions du noyau retenu sont : $D_e=22.9$ mm ; $D_i=14$ mm ; $h=9.53$ mm. Le composant comportera 5 couches complètes et une spire sur la 6^o couche.

Ces valeurs sont utilisées pour, d'une part normaliser les variables de la procédure d'optimisation et d'autre part pour normaliser les critères de la fonction objectif. Le dimensionnement initial aboutit à une solution sélectionnée parmi l'ensemble des dimensionnements respectant le cahier des charges. L'amélioration apportée par l'optimisation peut être quantifiée immédiatement puisque initialement la fonction objectif vaut 1 et le dimensionnement est amélioré dès qu'un objectif inférieur à un est obtenu.

3. Procédure d'optimisation

La description de la procédure de dimensionnement initial, outre la normalisation, permet de poser le problème clairement puisqu'il se présente sous forme simplifiée. Aussi, la procédure d'optimisation s'en inspire fortement. La procédure d'optimisation met en œuvre l'ensemble de la modélisation qui inclue :

- le modèle des pertes joules en alternatif,
- les modèles comportementaux du matériau magnétique et,
- la modélisation thermique stationnaire.

L'atout majeur de cette formulation est sa flexibilité, autrement dit il est aisé de rajouter à volonté des modèles physiques plus précis. Ce pourrait être le cas pour une modélisation du matériau magnétique qui inclurait les effets de la température et de la fréquence sur la perméabilité.

Le point de départ de l'algorithme d'optimisation est constitué par :

- le cahier des charges,
- le résultat du dimensionnement initial,
- les coefficients de pondération des objectifs.

CHAPITRE IV

Puis, on procède de nouveau à un balayage des matériaux et des géométrie. On résout pour chaque combinaison de matériau et de géométrie du noyau le problème d'optimisation :

$$\min \alpha_1 \left(\frac{P_f + P_j}{P_o} \right)^2 + \alpha_2 \left(\frac{V_c + V_n}{V_o} \right)^2 \quad (134)$$

$$P_j + P_f - R_{th}^{-1} (T_c - T_a) = 0$$

$$L - 125 \mu H = f(N) - 125 \mu H = 0$$

$$B < B_{sat}$$

$$T_c \min < T_c < T_c \max$$

$$\frac{\pi N d c^2}{4 k b} < \frac{\pi}{4} (D_i^2 - D_m^2)$$

Le problème porte sur 5 variables dont 2 sont discrètes (M et G), et 3 sont continues (N, dc, Tc). L'expression $L=f(N)$ est donnée par l'équation (8) du chapitre I. L'origine des deux premières contraintes inégalités est évidente, en ce qui concerne la troisième elle explicite le fait que le bobinage (comportant N spires de diamètre dc) occupe une surface $\left(\frac{\pi N d c^2}{4 k b} \right)$ inférieure ou égale à la surface de la fenêtre ôtée de la surface nécessaire à sa réalisation $\left(\frac{\pi}{4} (D_i^2 - D_m^2) \right)$. Le problème est en réalité plus simple qu'il n'y paraît. En effet, l'inductance ne dépend que du nombre de spires, on peut donc dans la procédure d'optimisation commencer par trouver le nombre de spires N tel que $L=125 \mu H$. Puis, la contrainte égalité résoudre le problème d'optimisation, la contrainte égalité inductance n'intervient plus, portant sur les variables dc et Tc. Finalement, la meilleure solution est sélectionnée parmi les solutions optimales calculées pour l'ensemble des combinaisons de matériau et de géométrie.

Lors de la programmation, les éléments de la modélisation ont été décomposés en fonctions auxquelles le programme principal fait appel. Parmi ces fonctions, il y a :

- le calcul de la résistance en alternatif pour un composant à plusieurs couches,
- l'expression de l'inductance,

puis soit :

- l'expression du modèle thermique stationnaire simplifié (équation (135)) à résoudre dans le cadre du dimensionnement initial,

ou bien

- l'expression de la fonction à minimiser incluant le modèle thermique stationnaire simplifié (équation(136)), dans le cadre de l'optimisation.

La **Figure 87** illustre l'articulation de chacune des fonctions, ou modules, dans le déroulement du programme.

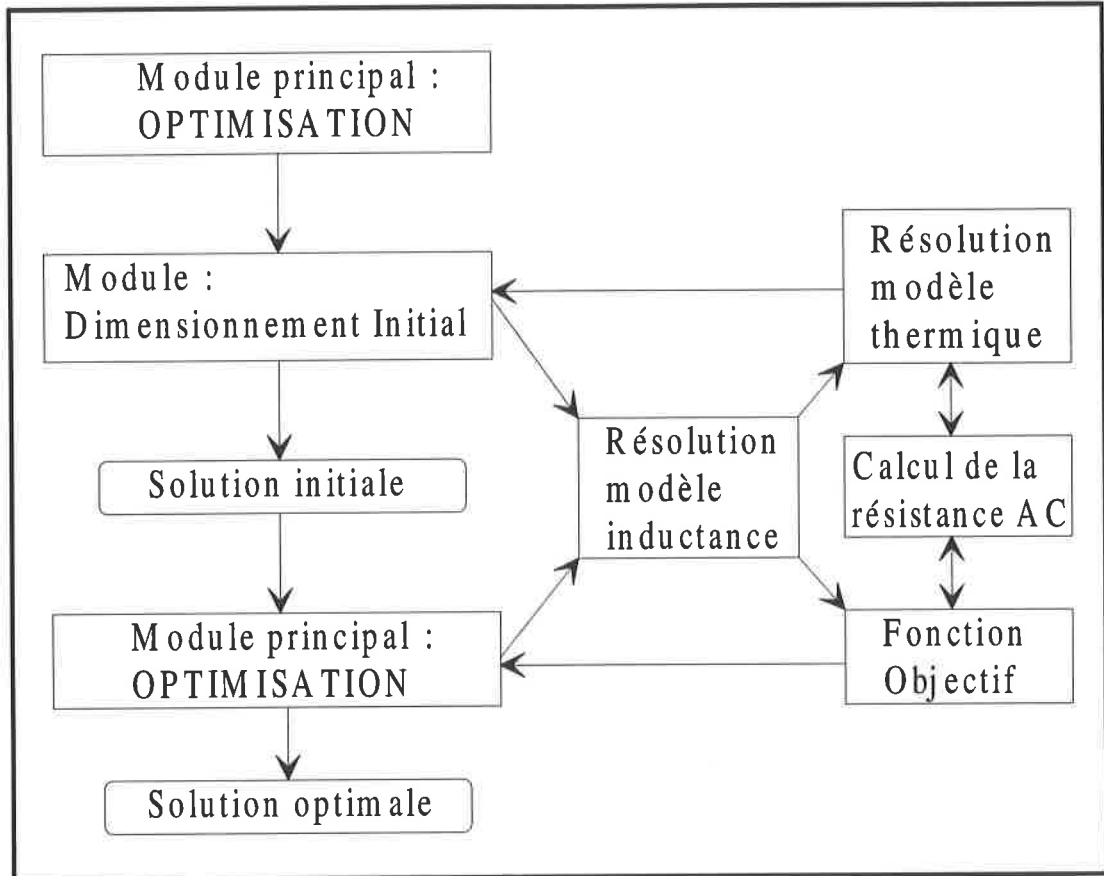


Figure 87 : Articulation des différents modules autour de la procédure d'optimisation.

Ainsi, à partir du cahier des charges et du dimensionnement initial qui en résulte, les résultats de l'optimisation, obtenus à partir de l'algorithme d'optimisation proposé et d'un algorithme génétique sont :

Algorithme	M	G	N _{opt}	D _{copt} (mm)	T _{copt} (°K)	P _{jopt} (W)	P _{fopt} (W)	V _{copt} (cm ³)	V _{nopt} (cm ³)	Obj
Newton	n°3	n°21	42.7	1.48	359.8	1.84	1.82	2.32	1.78	1.83
AG	n°3	n°21	42.7	1.48	359.8	1.84	1.82	2.32	1.78	1.83

L'amélioration apportée au dimensionnement initial, est immédiatement appréciable grâce à la valeur de la fonction objectif : 1.83, pour une valeur initiale de 2. Les deux algorithmes

CHAPITRE IV

employés donnent des résultats similaires. Cependant, il existe une très faible différence, portant sur le quatrième chiffre significatif, due à la différence dans la prise en compte de la contrainte égalité. Par ailleurs, l'algorithme de Newton permet un meilleur respect de la contrainte égalité.

Considérons la solution obtenue :

- le matériau n°3 de micrometal présente une perméabilité initiale de 55 et la géométrie n°21 correspond aux dimensions géométriques suivantes : $D_e=2.02\text{cm}$; $D_i=1.26\text{cm}$; $h=0.95\text{cm}$,
- le composant sera constitué de 6 couches complètes,
- l'optimum présente des pertes dans le noyau et dans les conducteurs sensiblement égales,
- la température optimale semble être la température maximale.

En bref, le dimensionnement optimal présente de meilleures performances que le dimensionnement initial, et la procédure, qui s'appuie sur une modélisation physique, aboutit à un composant dont les paramètres sont parfaitement déterminés. L'exactitude de la solution est bien entendu corrélée à la validité du jeu de modèles physiques. Dans la formulation du problème, l'influence de la température sur la perméabilité n'a pas été considérée faute de données provenant du constructeur. Les deux algorithmes convergent vers une même solution, l'algorithme génétique est moins rapide que l'algorithme de Newton, en raison du nombre d'évaluation de la fonction objectif plus important.

4. Effets du dimensionnement initial

Les problèmes de dimensionnement formulés en termes d'optimisation, nécessitent un point de départ, une réduction des variables et des objectifs. Souvent il est nécessaire d'avoir un ordre de grandeur des objectifs pour proposer des butées qui seront utilisées pour réduire les objectifs. Pour pallier cette indétermination nous utilisons les résultats d'un dimensionnement initial.

P_o (en Watts)	V_o (en cm^3)	P_{jopt}	P_{fopt}	V_{copt}	V_{nopt}
10	0.1	2.04	1.74	1.75	2.16
10	10	2.05	1.74	1.76	2.16
0.1	10	1.84	1.82	2.32	1.78
0.1	0.1	2.05	1.74	1.76	2.16

Tableau 10 : Résultats de l'optimisation en fonction de la normalisation des objectifs.

CHAPITRE IV

L'intuition est alors reportée sur la valeur à donner initialement à certaines variables, en l'occurrence à la température, ce qui est plus aisé quant on n'a aucun a priori de la solution. L'effet du choix des variables réduites apparaît lorsqu'on considère des valeurs farfelues pour réduire les fonctions objectifs. Le dimensionnement initial influe peu, et joue le rôle de coefficient de pondération. Mais l'influence existe tout de même, il faut donc garder à l'esprit le fait que la normalisation peut modifier la solution optimale.

5. Effets de la renormalisation

La normalisation adoptée peut, on le pressent de manière intuitive, influencer l'optimum. La normalisation correspond à un changement d'échelle qui tend à élaguer les solutions trop antagonistes pouvant correspondre à un volume élevé et de faibles pertes et vice-versa. On ne peut évidemment pas énoncer de généralités à partir des résultats obtenus sur notre problème, néanmoins cela permet de savoir dans ce cas si un nouveau changement d'échelle, qualifié de renormalisation, mènerait à un meilleur compromis.

Variables	Dimensionnement	Dimensionnement	Dimensionnement optimal après
	initial	optimal	renormalisation
Matériau	n°3	n°3	n°3
Géométrie	n°24	n°21	n°24
N	43	42.7	45.5
Dc	1.55mm	1.45mm	1.38mm
Tc	350°K	359.8°K	360°K
Pj	1.66W	1.84 W	2.05
Pf	1.71W	1.82 W	1.74
Vc	2.55 cm ³	2.32 cm ³	1.75
Vn	2.28cm ³	1.78 cm ³	2.16

Tableau 11 :*Récapitulatif des résultats du dimensionnement initial, optimal et renormalisé.*

Pour ce faire, nous suggérons d'utiliser le premier résultat d'optimisation pour réduire les variables et les objectifs puis de réitérer l'optimisation. Si la solution obtenue est proche de la solution précédente, la solution optimale est peu influencée par les valeurs choisies pour réduire les échelles. Si tel n'est pas le cas, il convient de recommencer cette opération jusqu'à ce que la suite des optimums converge, en revanche si cela ne converge pas on peut remettre

en cause la notion de compromis. Pour notre problème, nous avons déjà en notre possession le résultat du dimensionnement initial, et une première solution optimale. En utilisant cette dernière le nouvel optimum obtenu est modifié par rapport à l'optimum calculé. Lorsqu'on répète l'opération la solution retenue n'évolue plus. La réduction des variables a donc un effet sur la solution optimale, en réitérant la normalisation la solution converge.

6. Effet de la pondération

La pondération permet à l'utilisateur de déséquilibrer le compromis en faveur d'un des critères qui constitue l'objectif. Puisque le cahier des charges est somme toute plutôt banal, les tendances observées devraient donner une idée de ce qu'il en est en général. Ainsi, nous avons recherché la solution optimale, pour des coefficients de pondération évoluant de façon complémentaires.

	Pjopt	Pfopt	Vcopt	Vnopt
$(\alpha_1; \alpha_2) = (0; 1)$	2.06	1.75	1.75	2.16
$(\alpha_1; \alpha_2) = (0.5; 0.5)$	2.04	1.75	1.76	2.16
$(\alpha_1; \alpha_2) = (1; 0)$	1.84	1.82	2.32	1.78

Tableau 12 : Solution optimale en fonction de la pondération.

La solution optimale semble hésiter entre deux noyaux, et la pondération a peu d'influence sur celle-ci. L'antagonisme des fonctions objectif est en fait négocié par le modèle thermique. Puisqu'on impose une gamme de température de fonctionnement étroite, quelque soit la pondération, quand l'objectif est de réduire les pertes l'expansion du volume se trouve limitée par la température minimale de fonctionnement et de façon réciproque quand l'objectif est de réduire le volume l'augmentation des pertes est limitée par la température maximale de fonctionnement.

7. Problème du choix de la fréquence

a) La fréquence comme variable du dimensionnement

D'ordinaire, la fréquence des cellules de commutation est choisie supérieure à 20kHz de façon à éviter la pollution sonore. Dans les faits, la fréquence produit deux effets antagonistes. D'un côté, elle réduit les volumes des composants passifs, d'un autre côté elle augmente les pertes

CHAPITRE IV

tant dans les cellules de commutation que dans les éléments passifs, ainsi que les volumes des échangeurs de chaleur. Le choix de la fréquence devrait donc résulter d'un compromis entre les pertes et le volume. Bien sur, elle prend tout son sens dans le cadre du dimensionnement d'un convertisseur complet. Nous nous contenterons d'examiner le choix de la fréquence dans le cas de l'inductance seule. Désormais, la contrainte égalité porte sur la valeur efficace de l'ondulation de courant. Le dimensionnement doit être mené à ondulation de courant fixe, le produit de l'inductance par la fréquence doit alors être constant. Ceci se traduit dans l'écriture du problème en termes d'optimisation par une contrainte égalité qui vient se substituer à la contrainte précédente qui pesait sur l'inductance seule. Puisque les résultats de l'optimisation tendent à montrer que la valeur optimale de la température correspond à la borne supérieure de la gamme de température, cette optimisation sera effectuée à température fixe et égale à T_{cmax} . Quant à la fréquence, limitée à 100kHz, elle devient une variable du problème d'optimisation :

$$\begin{aligned} \min \alpha_1 \left(\frac{P_f + P_j}{P_o} \right)^2 + \alpha_2 \left(\frac{V_c + V_n}{V_o} \right)^2 & \quad (137) \\ P_j + P_f - R_{th}(T_{cmax} - T_a) = 0 & \\ L \times f - \frac{U_l}{\Delta I_{eff}} = g(N, dc, f) - \frac{U_l}{\Delta I_{eff}} = 0 & \\ B < B_{sat} & \\ \frac{\pi N d c^2}{4 k b} < \frac{\pi}{4} (D_i^2 - D_m^2) & \\ 20 \text{kHz} < f < 100 \text{kHz} & \end{aligned}$$

Le problème d'optimisation comporte alors 2 variables discrètes et 3 variables continues (N , dc , f). La seconde contrainte égalité impose la valeur efficace de l'ondulation de courant et la tension aux bornes de l'inductance.

Une contrainte d'inégalité portant sur f permet de ne pas déborder sur la zone dite de pollution sonore. La transformation du problème d'optimisation en problème de minimisation fait appel à la combinaison de la pénalisation et du lagrangien, tel que cela a été exposé précédemment.

Les résultats de cette optimisation sont :

Algorithm	M	G	fopt	Nopt	dcopt	Tcopt	Pjopt	Pfopt	Vcopt	Vnopt
me			kHz		(mm)	(°K)	(W)	(W)	(cm ³)	(cm ³)
Newton	2	17	100	54.5	1.39	349	1.16	1.06	1.09	1.19

Tableau 13 : Solution optimale en fonction de la fréquence.

CHAPITRE IV

La solution optimale est obtenue pour une fréquence proche de la fréquence maximale. Le fait qu'elle soit légèrement en deçà signifie que le gain produit par l'augmentation de fréquence ne contrebalance pas la contrepartie sur les pertes, soit que la pente est faible dans cette zone. De la même manière pour la température, on peut donc supposer que le profil de la fonction objectif s'apparente à une vallée autour de l'optimum.

b) *Evolution de la solution optimale paramétrée par la fréquence*

L'influence de la fréquence peut être perçue différemment en cherchant l'évolution de la solution optimale en fonction de la fréquence. Le problème diffère du précédent puisqu'alors la fréquence reprend sa place dans le cahier des charges, et l'optimisation est menée pour plusieurs fréquences. L'optimisation est menée pour une valeur d'ondulation de courant imposé, donc la valeur de l'inductance est inversement proportionnelle à la fréquence. Les calculs ont été menés en parallèle par notre routine et l'algorithme génétique, avec des résultats semblables.

Fréquence	dcopt (mm)	Nopt	Tcopt (°K)	Pjopt (W)	Pfopt (W)	Vcopt (cm ³)	Vnopt (cm ³)	M	G
20kHz=>L=125μH	1.38	45.5	360	2.05	1.74	1.75	2.16	3	23
40kHz=>L=62.5μH	1.55	37.5	359	1.16	1.93	1.75	1.19	3	17
60kHz=>L=42μH	1.31	42.8	356.5	1.74	0.88	1.29	1.19	2	17
80kHz=>L=31.2μH	1.4	37.3	354	1.27	0.85	1.33	1.19	2	17
100kHz=>L=25μH	1.46	33.5	355	1.07	0.83	1.23	1.19	2	17

Tableau 14 : *Solution optimale en fonction de la fréquence*

Lorsque la fréquence augmente, les pertes et le volume sont simultanément réduits. Le gain lorsqu'on multiplie la fréquence par 5 est d'environ 2 pour les pertes et 1.6 pour le volume total. Sur la gamme de fréquence considérée on observe peu d'évolution du matériau et de la géométrie optimale. Il est étonnant de constater que la température optimale ne tend pas systématiquement vers la valeur maximale. Le gain de la montée en fréquence pour l'inductance est net. Il resterait à savoir si la contre partie n'est pas trop importante pour les autres éléments.

E. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons effectué une revue des algorithmes de minimisation et présenté différentes possibilités de transformer le problème d'optimisation en problème de minimisation. Pour cela, les contraintes égalités et inégalités doivent être incorporées dans la fonction objectif. La méthode de transformation utilisée conjugue une pénalisation et un Lagrangien. Cette méthode s'apparente à un Lagrangien augmenté mais en diffère par le traitement des multiplicateurs de Lagrange associés. En effet, dans un algorithme de Lagrangien augmenté, les multiplicateurs sont évalués de manière itérative par une relation de récurrence spécifique [33] tandis que nous les traitons comme des variables du problème. L'algorithme de Newton est utilisé pour minimiser le problème ainsi transformé.

Dans un second temps, nous avons examiné la formulation du problème de dimensionnement en problème d'optimisation. Il nous est apparu préférable d'utiliser une solution de dimensionnement, qualifiée de dimensionnement initial, afin de normaliser les variables et les objectifs. Cela permet de s'affranchir du problème du choix du point de départ de l'algorithme ainsi que celui de la mise à l'échelle des critères qui seraient du ressort d'un spécialiste.

L'outil d'optimisation et la formulation du dimensionnement acquise, nous nous sommes intéressés à des cas concrets. Tout d'abord la minimisation de l'inductance parasite d'un condensateur à partir de l'algorithme proposé et d'un algorithme génétique a permis de conforter les résultats de l'optimisation. Puis le dimensionnement optimal d'une inductance à noyau torique s'appuyant sur la modélisation thermique et sur une modélisation électromagnétique a été réalisé.

Dés la formulation du problème d'optimisation de l'inductance à noyau torique, l'effet du composant dans son environnement se fait ressentir (à travers le cahier des charges). Cet effet nous amène à penser que l'optimisation prend tout son sens lorsque tous les intérêts sont mis en présence, c'est à dire dans le contexte plus global de l'optimisation d'un convertisseur. Mais la connaissance du convertisseur passe par celle de ses constituants.

F. Bibliographie

- [33] J.C. CULIOLI, "Introduction à l'optimisation", éd. ELLIPSES, 1994.
- [34] MATLAB5 Documentation, éd. Mathworks inc., Décembre 1996.
- [35] S. SIAMI, "Modélisation fréquentielle des condensateurs à films métallisés : Nouvelles structures de condensateurs à inductance réduite", Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Toulouse, France (1997).
- [36] N. DAUDE, C. COILLOT, C. JOUBERT, S. SIAMI, P. MERLE, "Numerical Optimization of Capacitors with Internal Cylinders : Minimization of the Stray Inductance", CESA'98 IEEE, Hammamet, Tunisie, 1-4 Avril 1998.
- [37] J. GREFENSTETTE, "A user's guide to GENESIS version 5.0", October 1990
- [38] J.P. FERRIEUX, F.FOREST, "Alimentations à découpage, convertisseurs à résonance", éditions MASSON , 1994.
- [39] Catalogue MICROMETALS Iron powder cores, "Power conversion & line filter applications", catalogue 4,
- [40] Y. PATIN, "Contribution à l'étude thermique et au dimensionnement des composants magnétiques pour l'électronique de puissance", thèse de l'Université Montpellier II, France, 1998.
- [41] A.D. KONE, "Contribution à la conception des actionneurs électriques par formulation en termes d'optimisation", thèse de doctorat de l'INPT, 1993.
- [42] P. ROPA, C. GLAIZE, "Decrease of Inductance and Electromagnetic Interference in Power Electronics Capacitors", IEE Fifth Conference on Power Electronics and Variable-Speed Drives, London October 26th-28th 1994, pp. 169-174.
- [43] B.SARENI, "Méthodes d'optimisation multimodales associées à la modélisation numérique en électromagnétisme", thèse de doctorat de l'INPG, France, 1999.

CHAPITRE IV

- [44] D.E. GOLBERG, "Algorithmes génétiques", ed. Addison-Wesley, USA, 1991.
- [45] C.R. HOUCK, J.A. JOINES, M.G. KAY, "Binary and real-valued simulation evolution for Matlab : GAOT V2", Copyright 1998.

CONCLUSION

CONCLUSION GENERALE

CONCLUSION GENERALE

Nous avons présenté, une nouvelle approche pour le dimensionnement des composants magnétiques qui repose sur une modélisation physique des phénomènes électromagnétiques et des échanges de chaleur en régime stationnaire. Ces deux modélisations sont rassemblées autour d'une méthode, inspirée par la thermomécanique, qui permet de calculer les sources de chaleur à partir de l'équation de la chaleur. Cette modélisation permet un dimensionnement formulé en termes d'optimisation.

Dans le **chapitre 1** la modélisation électromagnétique est menée sur un noyau torique d'une part et son bobinage d'autre part. Le comportement électromagnétique du noyau est restitué à travers l'utilisation des données d'un constructeur. Celles ci permettent de rendre compte de l'inductance en fonction du niveau d'induction, des pertes dans le noyau en fonction de la fréquence et de l'induction. Au vu de son expression le calcul de l'inductance se présente d'emblée comme un problème qui, contrairement aux méthodes de dimensionnement habituelles, requiert une résolution numérique. Un calcul analytique des pertes par effet Joule dans le bobinage en fonction de la fréquence est mené, puis comparé à des simulations effectuées par le logiciel Maxwell2D, ainsi qu'à des mesures de résistance par analyseur d'impédance sur le bobinage seul. L'ensemble de la modélisation électromagnétique est confrontée à une mesure d'impédance. Celle ci, pour être fiable nécessite une mise en œuvre de l'analyseur d'impédance qui amplifie le signal de son oscillateur. On s'assure ainsi de la validité de l'ensemble de la modélisation.

La modélisation thermique d'un bobinage, détaillée dans le **chapitre 2**, met en exergue des phénomènes rarement abordés. Une étude globale décompose les échanges de chaleur par rayonnement et convection. Compte-tenu de la géométrie du bobinage, nous présentons les méthodes permettant de calculer le facteur de vue nécessaire à une modélisation rigoureuse du rayonnement. Cette modélisation sert de pilier à une approche locale du rayonnement et de la convection. Après quoi une modélisation analytique des échanges de chaleur dans une inductance à noyau torique est entreprise. Cette modélisation thermique est validée par des mesures de température sur les constituants du composant pour un régime de fonctionnement continu et alternatif.

CONCLUSION

La difficulté éprouvée pour la connaissance des pertes respectives dans les matériaux peut-être surmontée par la méthode de calcul des sources de chaleur proposée dans le **chapitre 3**. Cette méthode est présentée, puis mise en œuvre sur le bobinage, afin de calculer les pertes Joule dont il est le siège. Cette méthode repose sur l'hypothèse de linéarité des échanges de chaleur, cette hypothèse devient erronée lorsque l'élévation de température dépasse la dizaine de degrés. Nous proposons alors d'intégrer à l'équation de la chaleur la modélisation thermique stationnaire afin d'accroître le domaine de validité et la précision du calcul des sources de chaleur. Reprenant la progression du chapitre précédent nous en arrivons à appliquer la méthode à l'inductance à noyau torique. Une difficulté supplémentaire apparaît : le couplage thermique entre noyau et bobinage. Là encore, la modélisation thermique stationnaire permet d'apporter une réponse satisfaisante à ce problème.

Finalement le **chapitre 4** donne un aperçu, non exhaustif, des algorithmes de minimisation, en évoquant la transformation d'un problème d'optimisation en problème de minimisation, nous proposons une méthode de transformation qui, couplée à l'algorithme de minimisation adéquat, donne de bons résultats. L'algorithme proposé est ainsi utilisé pour résoudre la minimisation de l'inductance parasite d'un condensateur, et conforté par un algorithme génétique. La formulation du problème de dimensionnement d'un composant magnétique en termes d'optimisation est le préalable nécessaire à l'obtention de résultats dotés d'une signification physique. Un exemple de dimensionnement permet de répondre en partie aux questionnements induits par la formulation de l'optimisation. Il apparaît que le cahier des charges, point de départ de l'optimisation, est lié au contexte de l'utilisation, et que l'optimisation prendrait tout son sens dans le cadre de l'optimisation d'un système. La connaissance des éléments étant une étape nécessaire.

Nous avons souhaité dans ce travail porter un regard nouveau sur les composants magnétiques. Il en est ressorti des points de vue originaux, certains méritent une attention particulière en raison de leur potentiel. Il nous semble que la méthode de calcul des sources de chaleur est à même de susciter l'intérêt. En effet, alors que dans de nombreux cas la vérification expérimentale de répartition de sources de chaleur est quasi impossible, l'outil de calcul des sources de chaleur peut permettre une analyse fine des phénomènes pour peu qu'il soit associé à un matériel de métrologie adéquat (termographie). Citons, l'éventualité de

CONCLUSION

retrouver des répartitions de courant dans des conducteurs en alternatif, ou encore de mesurer les pertes locales d'un condensateur.

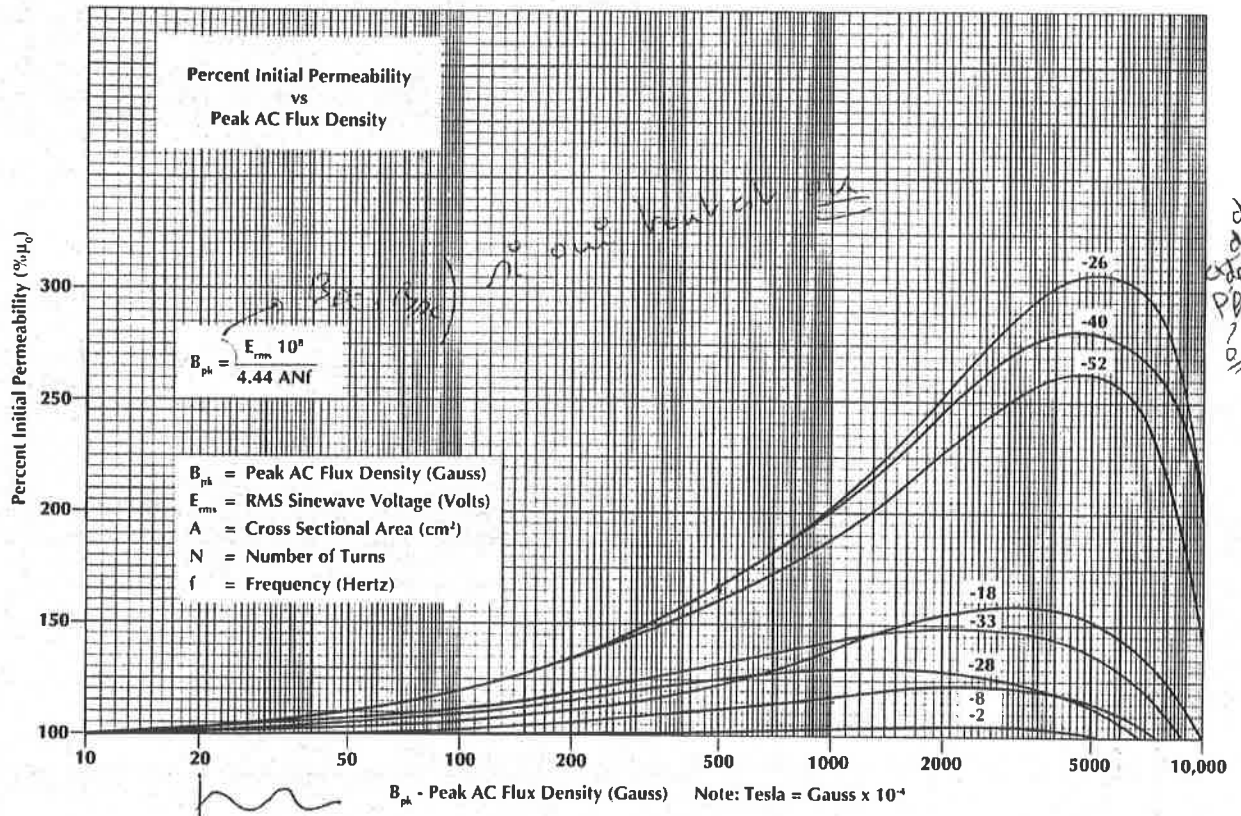
Enfin, l'ensemble de l'étude a été mené sur un composant déconnecté de son contexte, pourtant celui ci n'est jamais seul et les interactions entre les éléments d'un système sont nombreuses. A ce titre, la modélisation thermique d'un système pourrait être envisagé en utilisant les calculs de facteur de vue pour quantifier les échanges de chaleur entre composants.

ANNEXES

ANNEXE 1

PERMEABILITE en fonction de l'induction AC maximale : $\mu_r(B_g)$

μ_r en % de μ_{ri} ; B_g en Gauss



Valeur des coefficients de la corrélation de $\mu_r(B_g)$, pour différents matériaux :

PERCENT PERMEABILITY vs PEAK AC FLUX DENSITY - See page 19						
FORMULA: $\% \mu_0 = ((a+cB+eB^2)/(1+bB+dB^2))^{1/2}$			Where: $\% \mu_0$ = Percentage (ie: 90%=90) B = Peak AC Flux Density (Gauss)			
Material	a	b	c	d	e	
-2	9970	5.77×10^{-4}	7.29	-8.96×10^{-8}	-1.18×10^{-3}	
-8	9990	4.52×10^{-4}	11.4	8.82×10^{-9}	-8.29×10^{-4}	
-18	10270	1.01×10^{-4}	12.3	2.70×10^{-8}	-8.43×10^{-4}	
-26	10600	7.21×10^{-5}	37.8	-7.74×10^{-9}	-3.56×10^{-3}	
-40	10480	1.62×10^{-4}	40.8	-6.51×10^{-9}	-3.35×10^{-3}	
FORMULA: $\% \mu_0 = a+bB+cB^{1/2} + dB^2$			Where: $\% \mu_0$ = Percentage (ie: 90%=90) B = Peak AC Flux Density (Gauss)			
Material	a	b	c	d		
-28	93.4	-0.0299	2.08	8.30×10^{-7}		
-33	92.6	-0.0251	2.36	1.07×10^{-7}		
-52	92.0	.0134	2.77	-3.66×10^{-6}		

Annexe 2

calcul des densités de courant en alternatif, cas monocouche :

Les constantes de l'équation (14) (Chapitre I) sont conditionnées par la valeur du champ d'excitation en bordure du conducteur, il en découle :

$J_0 =$

$$\frac{j \frac{NI}{\sqrt{2\pi r_2} \delta p} (Kr'(\Delta r_1) + jKi'(\Delta r_1))}{(Br'(\Delta r_2) + jBi'(\Delta r_2))(Kr'(\Delta r_1) + jKi'(\Delta r_1)) - (Kr'(\Delta r_2) + jKi'(\Delta r_2))(Br'(\Delta r_1) + jBi'(\Delta r_1))}$$

$J_1 =$

$$\frac{-j \frac{NI}{\sqrt{2\pi r_2} \delta p} (Br'(\Delta r_1) + jBi'(\Delta r_1))}{(Br'(\Delta r_2) + jBi'(\Delta r_2))(Kr'(\Delta r_1) + jKi'(\Delta r_1)) - (Kr'(\Delta r_2) + jKi'(\Delta r_2))(Br'(\Delta r_1) + jBi'(\Delta r_1))}$$

On en déduit en réinjectant les expressions des constantes J_0 et J_1 dans l'équation (14).bis du chapitre I, l'expression de la densité de courant J_{int} pour $r \in [r_1; r_2]$:

$$J_{int}(\Delta r) = \frac{j \frac{NI}{\sqrt{2\pi r_2} \delta p} [(Kr'(\Delta r_1) + jKi'(\Delta r_1))Bo(\Delta r j^{3/2}) - (Br'(\Delta r_1) + jBi'(\Delta r_1))Ko(\Delta r j^{1/2})]}{(Br'(\Delta r_2) + jBi'(\Delta r_2))(Kr'(\Delta r_1) + jKi'(\Delta r_1)) - (Kr'(\Delta r_2) + jKi'(\Delta r_2))(Br'(\Delta r_1) + jBi'(\Delta r_1))}$$

De même, on obtient la densité de courant J_{ext} pour la couronne extérieure $r \in [r_3; r_4]$:

$$J_{ext}(\Delta r) = \frac{j \frac{NI}{\sqrt{2\pi r_3} \delta p} [(Kr'(\Delta r_4) + jKi'(\Delta r_4))Bo(\Delta r j^{3/2}) - (Br'(\Delta r_4) + jBi'(\Delta r_4))Ko(\Delta r j^{1/2})]}{(Br'(\Delta r_3) + jBi'(\Delta r_3))(Kr'(\Delta r_4) + jKi'(\Delta r_4)) - (Kr'(\Delta r_3) + jKi'(\Delta r_3))(Br'(\Delta r_4) + jBi'(\Delta r_4))}$$

Cette expression est valable tant que le bobinage ne comporte pas plus d'une couche. Si ce n'est pas le cas, alors les conditions aux limites qui portent sur le champ d'excitation permettent de déterminer la nouvelle expression de la densité de courant.

Annexe 3

Expressions des densités de courant en alternatif pour N couches de bobinage :

La densité de courant dans la couche intérieure k, qui comporte N_k conducteurs, et dont le champ à la périphérie extérieure est créé par N_{rest} conducteurs s'exprime :

$$J_{int}(\Delta r) = \frac{j \frac{I}{\sqrt{2\pi\delta p_k}} \left[\frac{N_{i_{rest}} + N_{i_k}}{r_{2k}} (Kr'(\Delta r_{1k}) + jKi'(\Delta r_{1k})) - \frac{N_{i_{rest}}}{r_{1k}} (Kr'(\Delta r_{2k}) + jKi'(\Delta r_{2k})) \right] Bo(\Delta r j^{3/2})}{(Br'(\Delta r_{2k}) + jBi'(\Delta r_{2k}))(Kr'(\Delta r_{1k}) + jKi'(\Delta r_{1k})) - (Kr'(\Delta r_{2k}) + jKi'(\Delta r_{2k}))(Br'(\Delta r_{1k}) + jBi'(\Delta r_{1k}))} + \frac{j \frac{I}{\sqrt{2\pi r_2 \delta p_k}} \left[\frac{N_{i_{rest}}}{r_{1k}} (Br'(\Delta r_{2k}) + jBi'(\Delta r_{2k})) - \frac{N_{i_{rest}} + N_{i_k}}{r_{2k}} (Br'(\Delta r_{1k}) + jBi'(\Delta r_{1k})) \right] Ko(\Delta r j^{3/2})}{(Br'(\Delta r_{2k}) + jBi'(\Delta r_{2k}))(Kr'(\Delta r_{1k}) + jKi'(\Delta r_{1k})) - (Kr'(\Delta r_{2k}) + jKi'(\Delta r_{2k}))(Br'(\Delta r_{1k}) + jBi'(\Delta r_{1k}))}$$

De même, la densité de courant dans la couronne extérieure k, s'exprime :

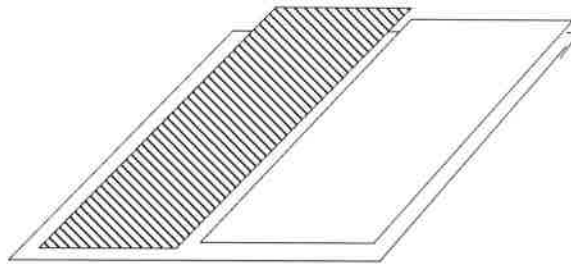
$$J_{int}(\Delta r) = \frac{j \frac{I}{\sqrt{2\pi\delta p_k}} \left[\frac{N_{e_{rest}} + N_{e_k}}{r_{3k}} (Kr'(\Delta r_{4k}) + jKi'(\Delta r_{4k})) - \frac{N_{e_{rest}}}{r_{4k}} (Kr'(\Delta r_{3k}) + jKi'(\Delta r_{3k})) \right] Bo(\Delta r j^{3/2})}{(Br'(\Delta r_{3k}) + jBi'(\Delta r_{3k}))(Kr'(\Delta r_{4k}) + jKi'(\Delta r_{4k})) - (Kr'(\Delta r_{3k}) + jKi'(\Delta r_{3k}))(Br'(\Delta r_{4k}) + jBi'(\Delta r_{4k}))} + \frac{j \frac{I}{\sqrt{2\pi r_2 \delta p_k}} \left[\frac{N_{e_{rest}}}{r_{4k}} (Br'(\Delta r_{3k}) + jBi'(\Delta r_{3k})) - \frac{N_{e_{rest}} + N_{e_k}}{r_{3k}} (Br'(\Delta r_{4k}) + jBi'(\Delta r_{4k})) \right] Ko(\Delta r j^{3/2})}{(Br'(\Delta r_{3k}) + jBi'(\Delta r_{3k}))(Kr'(\Delta r_{4k}) + jKi'(\Delta r_{4k})) - (Kr'(\Delta r_{3k}) + jKi'(\Delta r_{3k}))(Br'(\Delta r_{4k}) + jBi'(\Delta r_{4k}))}$$

Annexe 4

**Calcul des flux de chaleur rayonnés par les surfaces extérieures,
supérieures et inférieures :**

Le composant est assimilé à 3 surfaces planes : le noyau (1), les conducteurs rassemblés (2), et l'ambient (2).

Nous pouvons dans le cadre de cette simplification établir les facteurs de vue entre les surfaces, puis calculer les flux de chaleur échangés par rayonnement entre ces surfaces.



Ceux ci peuvent être exprimés de façon relativement triviale, moyennant quelques approximations, telles que le fait de négliger la distance séparant le cuivre du noyau :

$$f_{11} = f_{22} = f_{33} = f_{23} = f_{32} = 0$$

$$f_{21} = f_{31} = 1$$

$$f_{12} = \frac{S_2}{S_1} \quad \& \quad f_{13} = 1 - \frac{S_2}{S_1}$$

Les équations de transferts radiatifs s'expriment :

$\varphi_1^N = \varphi_1^p - \varphi_1^i$	&	$\varphi_1^p = \sigma \epsilon_f \overline{Tf}^4 + (1 - \epsilon_f) \varphi_1^i$	&	$\varphi_1^i = f_{12} \varphi_2^p + f_{13} \varphi_3^p$
$\varphi_2^N = \varphi_2^p - \varphi_2^i$		$\varphi_2^p = \sigma \epsilon_c \overline{Tc}^4 + (1 - \epsilon_c) \varphi_2^i$		$\varphi_2^i = \varphi_1^p$
$\varphi_3^N = \varphi_3^p - \varphi_3^i$		$\varphi_3^p = \sigma T a^4$		$\varphi_3^i = \varphi_1^p$

Les flux auxquels nous nous intéressons sont : φ_1^N et φ_2^N , soit :

$$\varphi_1^N = \sigma \epsilon_f \overline{Tf}^4 - \epsilon_f \varphi_1^i$$

$$\varphi_2^N = \sigma \epsilon_c \overline{Tc}^4 - \epsilon_c \varphi_2^i = \sigma \epsilon_c \overline{Tc}^4 - \epsilon_c \varphi_1^p$$

A partir du jeu d'équations nous écrivons pour les flux :

$$\varphi_1^i = f_{12} (\sigma \epsilon_c \overline{Tc}^4 + (1 - \epsilon_c) \varphi_1^p) + f_{13} \sigma T a^4$$

Puis en substituant soit φ_1^p soit φ_1^i , nous obtenons l'expression soit de φ_1^p soit de φ_1^i :

$$\varphi_1^p = \frac{\sigma \varepsilon_f T_f^4 + (1 - \varepsilon_f) f_{12} \sigma \varepsilon_c T_c^4 + f_{13} (1 - \varepsilon_f) \sigma T_a^4}{(1 - f_{12} (1 - \varepsilon_f) (1 - \varepsilon_c))}$$

$$\varphi_1^i = \frac{f_{12} \sigma \varepsilon_c T_c^4 + (1 - \varepsilon_c) f_{12} \sigma \varepsilon_f T_f^4 + f_{13} \sigma T_a^4}{(1 - f_{12} (1 - \varepsilon_f) (1 - \varepsilon_c))}$$

De ces deux flux on déduit immédiatement φ_1^N et φ_2^N :

$$\varphi_1^N = \sigma \varepsilon_f \frac{f_{12} \varepsilon_c (\overline{T_f^4} - \overline{T_c^4}) + f_{13} (\overline{T_f^4} - T_a^4)}{(1 - f_{12} (1 - \varepsilon_f) (1 - \varepsilon_c))}$$

$$\varphi_2^N = \sigma \varepsilon_c \frac{f_{13} (1 - \varepsilon_f) (\overline{T_f^4} - T_a^4) + \varepsilon_f (\overline{T_c^4} - T_f^4)}{(1 - f_{12} (1 - \varepsilon_f) (1 - \varepsilon_c))}$$

Ces flux expriment les flux surfaciques évacués par chacune des faces. On déduit le flux de chaleur qui sera rayonné par ces faces, en l'occurrence :

$$\Phi_{ray}^{cn} = \varphi_2^N S_2$$

$$\Phi_{ray}^{na} = \varphi_1^N S_1$$

Annexe 5

Calcul des flux de chaleur rayonnés à l'intérieur du tore (cf. Figure 44 du chapitre II)

Les indices 1 & 2 se rapportent à l'environnement, qui est en équilibre thermique, et donc d'émissivité unitaire. L'indice 3 se rapporte au conducteur, et l'indice 4 se rapporte au noyau. Le facteur de vue entre 1 et 2, bien connu sera nommé : $f_{12} = f_{21} = f(x)$. Le facteur de vue du cylindre sur lui-même, déterminé lors de l'étude de l'inductance à air sera noté $f'(x)$, il est lié à $f(x)$ par : $f(x) = 1 - 2 \frac{S_3 + S_4}{S_1} (1 - f'(x))$, en outre : $f_{11} = f_{22} = 0$. Par application, de la conservation de l'énergie et du théorème de réciprocité, nous obtenons le système d'équations suivant :

$$\begin{aligned} f_{13} + f_{14} &= 1 - f(x) \\ f_{23} + f_{24} &= 1 - f(x) \\ f_{31} + f_{32} + f_{33} + f_{34} &= 1 \\ f_{41} + f_{42} + f_{43} + f_{44} &= 1 \end{aligned}$$

Compte tenu des symétries : $f_{31} = f_{32}$ & $f_{41} = f_{42}$.

$$\begin{aligned} f_{13} + f_{14} &= 1 - f(x) \\ f_{23} + f_{24} &= 1 - f(x) \\ 2f_{31} + f_{33} + f_{34} &= 1 \\ 2f_{41} + f_{43} + f_{44} &= 1 \end{aligned}$$

Manifestement, le problème comporte plus d'inconnues que d'équations, il faut trouver deux équations supplémentaires pour le résoudre. Nous proposons d'émettre une hypothèse sur les expressions des facteurs de vue des conducteurs sur eux-mêmes (f_{33}) et du noyau sur eux-mêmes (f_{44}). Lorsque le bobinage remplit complètement la surface intérieure alors le facteur de vue du bobinage sur lui-même est égal au facteur de vue du cylindre sur lui-même (f'), tel qu'il a été calculé dans la modélisation thermique stationnaire de l'inductance à air. Quand la surface de bobinage devient nulle, le facteur de vue du bobinage sur lui-même tend vers 0 tandis que celui du noyau sur lui-même tend vers le facteur de vue du cylindre sur lui-même. En supposant qu'entre les deux remplissages extrêmes le facteur de vue évolue linéairement avec la surface de bobinage les facteurs de vue du bobinage (f_{33}) et du noyau (f_{44}) s'écrivent :

$$f_{33} = \frac{S_3}{S_3 + S_4} f'$$

$$f_{44} = \frac{S_4}{S_3 + S_4} f'$$

Ensuite, la même dépendance apparaît entre le facteur de vue du disque 1 sur le bobinage 3 (f_{13}), et du disque 1 sur le noyau 4 (f_{14}). Cette fois-ci la proportionnalité est relative au facteur de vue du disque sur l'ensemble du cylindre, et peut donc se déduire du facteur de vue entre deux disques (f) :

$$f_{13} = \frac{S_3}{S_3 + S_4} (1 - f)$$

$$f_{14} = \frac{S_4}{S_3 + S_4} (1 - f)$$

Il en découle alors les expressions des facteurs de vue f_{34} et f_{43} , à partir de :

$$f_{34} = 1 - 2f_{31} - f_{33}$$

$$f_{43} = 1 - 2f_{41} - f_{44}$$

On exprime ainsi :

$$f_{34} = \frac{S_4}{S_3 + S_4} \left(1 + 2 \frac{S_1}{S_3 + S_4} (f - 1) \right)$$

$$f_{43} = \frac{S_3}{S_3 + S_4} \left(1 + 2 \frac{S_1}{S_3 + S_4} (f - 1) \right)$$

Nous avons ainsi des expressions de tous les facteurs de vue de notre problème. Ces expressions résultent de l'analyse des facteurs de vue d'un cylindre, et de la pondération des facteurs de vue du problème du tore en fonction des surfaces intervenants.

Il reste à exprimer le flux de puissance surfacique pour le cuivre et le fer, cela correspond aux grandeurs dont les indices sont 3 et 4.

$$\begin{array}{l} \boxed{\varphi_3^N = \varphi_3^p - \varphi_3^i} \\ \boxed{\varphi_4^N = \varphi_4^p - \varphi_4^i} \end{array} \& \begin{array}{l} \boxed{\varphi_3^p = \sigma \varepsilon_3 \bar{T}_3^4 + (1 - \varepsilon_3) \varphi_3^i} \\ \boxed{\varphi_4^p = \sigma \varepsilon_4 \bar{T}_4^4 + (1 - \varepsilon_4) \varphi_4^i} \\ \boxed{\varphi_1^p = \varphi_2^p = \sigma T_a^4} \end{array} \& \begin{array}{l} \boxed{\varphi_3^i = (f_{31} + f_{32}) \sigma T_a^4 + f_{33} \varphi_3^p + f_{34} \varphi_4^p} \\ \boxed{\varphi_4^i = (f_{41} + f_{42}) \sigma T_a^4 + f_{43} \varphi_3^p + f_{44} \varphi_4^p} \end{array}$$

En substituant aux expressions des flux incidents, celles des flux partants, nous écrivons :

$$\varphi_3^i = (1 - f_{33} - f_{34}) \sigma T_a^4 + f_{33} (\sigma \varepsilon_3 \bar{T}_3^4 + (1 - \varepsilon_3) \varphi_3^i) + f_{34} (\sigma \varepsilon_4 \bar{T}_4^4 + (1 - \varepsilon_4) \varphi_4^i)$$

$$\varphi_4^i = (1 - f_{43} - f_{44}) \sigma T_a^4 + f_{43} (\sigma \varepsilon_3 \bar{T}_3^4 + (1 - \varepsilon_3) \varphi_3^i) + f_{44} (\sigma \varepsilon_4 \bar{T}_4^4 + (1 - \varepsilon_4) \varphi_4^i)$$

ANNEXES

En extrayant les expressions des flux incidents pour chaque surface, 3 et 4, nous obtenons les

$$\text{flux nets par face, puisque } \begin{cases} \varphi_3^N = \sigma \varepsilon_3 \overline{T_3^4} - \varepsilon_3 \varphi_3^i \\ \varphi_4^N = \sigma \varepsilon_4 \overline{T_4^4} - \varepsilon_4 \varphi_4^i \end{cases} :$$

$$\varphi_3^N = \sigma \varepsilon_3 \frac{[(1-f_{33})(1+f_{44}(\varepsilon_4-1))+f_{34}f_{43}(\varepsilon_4-1)-f_{34}\varepsilon_4](T_3^4-Ta^4)+f_{34}\varepsilon_4(T_3^4-T_4^4)}{(1+f_{33}(\varepsilon_3-1))(1+f_{44}(\varepsilon_4-1)-f_{34}f_{43}(1-\varepsilon_3))(1-\varepsilon_4)}$$

$$\varphi_4^N = \sigma \varepsilon_4 \frac{[(1-f_{44})(1+f_{33}(\varepsilon_3-1))+f_{34}f_{43}(\varepsilon_3-1)-f_{43}\varepsilon_3](T_4^4-Ta^4)+f_{43}\varepsilon_3(T_4^4-T_3^4)}{(1+f_{33}(\varepsilon_3-1))(1+f_{44}(\varepsilon_4-1)-f_{34}f_{43}(1-\varepsilon_3))(1-\varepsilon_4)}$$

Le calcul a été mené par résolution symbolique du système d'équations, puis les facteurs de vue doivent être substitués pour finalement exprimer les flux de chaleur rayonnés par les faces 3 et 4 :

$$\Phi_{cu\ int}^{ray} = \varphi_3^N S_{int}^c$$

$$\Phi_{fer\ int}^{ray} = \varphi_4^N S_{int}^n$$

Annexe 6

DIMENSIONS GEOMETRIQUES des NOYAUX TORIQUES

(extrait du catalogue MICROMETALS, d'après [46])

Géométrie n°	De(mm)	Di(mm)	h(mm)	Lnoyau(cm)	Snoyau (cm ²)	Vnoyau (cm ³)
1	4.06	1.98	1.52	0.93	0.015	0.014
2	5.08	2.24	1.78	1.15	0.023	0.026
3	6.48	3.05	2.44	1.5	0.023	0.026
4	7.8	3.84	3.25	1.84	0.06	0.11
5	6.73	2.67	4.83	1.47	0.09	0.133
6	9.53	5.21	3.25	2.31	0.064	0.147
7	9.53	4.45	4.83	2.18	0.114	0.248
8	11.2	5.82	4.04	2.68	0.099	0.266
9	12.7	7.7	4.83	3.19	0.112	0.358
10	12.7	7.7	6.35	3.19	0.148	0.471
11	12.7	7.7	8.51	3.19	0.2	0.637
12	12.7	5.08	6.35	2.79	0.223	0.622
13	15.2	8.53	5.94	3.74	0.187	0.699
14	12.7	7.7	9.53	3.19	0.223	0.711
15	17.5	9.4	4.83	4.23	0.179	0.759
16	17.5	9.4	6.35	4.23	0.242	1.03
17	20.2	12.6	6.35	5.14	0.231	1.19
18	15.2	8.53	11.9	3.74	0.374	1.40
19	18.3	7.11	6.6	4.01	0.349	1.4
20	17.5	9.4	9.53	4.23	0.358	1.52
21	20.2	12.6	9.53	5.14	0.347	1.78
22	20.2	12.6	12.7	5.14	0.347	1.78
23	23.9	14.2	7.92	5.97	0.362	2.16
24	22.9	14	9.53	5.78	0.395	2.28
25	33	19.8	5.72	8.28	0.361	2.99
26	26.9	14.5	7.92	6.49	0.461	3.00
27	31.6	18	7.11	7.75	0.459	3.55
28	26.9	14.5	11.1	6.49	0.659	4.28

ANNEXES

29	26.9	14.5	14.6	6.49	0.858	5.57
30	33	19.8	11.1	8.28	0.698	5.78
31	35.9	22.4	10.5	9.14	0.674	6.16
32	33	17.8	11.1	7.96	0.805	6.41
33	33	16.3	11.1	7.72	0.885	6.84
34	38.4	21.5	11.1	9.38	0.887	8.31
35	39.9	24.1	14.5	10.1	1.06	10.7
36	44.5	27.2	16.5	11.2	1.34	15
37	50.8	31.8	14	13	1.27	16.4
38	57.2	35.7	14	14.6	1.42	20.7
39	46.7	24.1	18	11.2	1.88	21
40	50.8	31.8	25.4	13	2.32	30
41	50.8	24.1	22.2	11.8	2.81	33.2
42	77.2	49	12.7	19.8	1.68	33.4
43	57.2	35.7	25.4	14.6	2.59	37.8
44	63.5	31.8	25.4	15	3.84	57.4
45	77.2	49	25.4	19.8	3.38	67
46	102	57.2	16.5	25	3.46	86.4
47	102	57.2	25.4	25	5.35	133
48	102	57.2	33	25	6.85	171
49	132	78.2	20.3	33.1	5.24	173
50	132	78.2	40.6	33.1	10.5	347

Méthode de conception de composants magnétiques à noyaux pour l'Electronique de Puissance

Résumé :

Ce travail de thèse présente une nouvelle méthode de conception des composants magnétiques pour l'Electronique de Puissance. Celle-ci s'articule autour de la modélisation électromagnétique d'une inductance à noyau torique multicouches qui intègre un calcul de la résistance des conducteurs en alternatif, une modélisation du comportement du noyau à partir des données "constructeur" et une modélisation thermique.

La modélisation thermique est abordée sur un plan analytique mais également à l'aide d'un outil de calcul des sources de chaleur. Cet outil, issu de la thermomécanique, permet de calculer les sources de chaleur localement dans un matériau à partir de relevés de température dynamique. Une première transposition à un bobinage seul montre l'intérêt d'inclure à une modélisation dynamique, la modélisation thermique statique. Une seconde transposition à l'inductance à noyau torique démontre la possibilité d'effectuer une séparation des pertes à partir de relevés de température.

Finalement, les équations représentatives sont réunies autour de la procédure de dimensionnement qui s'appuie sur l'optimisation mathématique. A cet effet, une revue des algorithmes d'optimisation est menée, et des aspects originaux sont présentés pour formuler le dimensionnement en termes d'optimisation.

Mots clefs:

Thermique – Inductance – Optimisation - Modélisation électromagnétique - Résistance en haute fréquence - Mesure des pertes.

Design methodology for magnetic core components in Power Electronic

Abstract

This work presents a new design methodology for magnetic core components in Power Electronic. This needs several kinds of modelling such as electromagnetic and thermal modelling of a multilayers toroidal core, of course a calculation of the AC resistance of the conductors and a behaviour modelling of the core from "manufacturer" data have been requisite.

The thermal modelling is approached on an analytic point of view and needs a tool of heat sources calculation. This tool, which is derived to thermomechanic, allows to compute locally the heat sources in a material from dynamic temperature measurement. A first transposition on a winding shows the interest to include to the dynamic modelling, a stationary thermal modelling. A second transposition on an inductor with toroidal core demonstrate the possibility to perform a separation of losses from temperature measurement.

Finally, the representative equations are collected together around the procedure of design which is supported on mathematics optimisation. In this aim a review of optimisation algorithm is led, and original aspects are presented to formulate the design in terms of optimisation.

Keywords:

Thermal – Inductance – Optimisation - Electromagnetic modelling - High frequency resistance - Losses measurement.